



### MODELOS DE REDES CONFIÁVEIS MODELS OF RELIABLE NETWORKS

Leonardo de Lima<sup>a</sup>; Leandro da Silva Teixeira<sup>b</sup>; Nair Maria Maia de Abreu<sup>c</sup>

<sup>a</sup> Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca (CEFET-RJ) - Rio de Janeiro, RJ, Brasil – Programa de Pós-Graduação em Tecnologia

<sup>b</sup> Centro de Análises de Sistemas Navais (CASNAV) - Rio de Janeiro, RJ, Brasil

<sup>c</sup> Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) - Rio de Janeiro, RJ, Brasil – Programa de Engenharia de Produção

#### Resumo

A confiabilidade de uma rede é a probabilidade da mesma permanecer conexa após a remoção de um subconjunto de seus vértices e/ou arestas. Com o número de vértices e de arestas previamente dados e assumindo que os vértices são confiáveis e que as arestas estão sujeitas a falhas, apresentamos, neste artigo, modelos de redes com máxima confiabilidade e, com base nisto, projetamos algoritmos para construção de tais redes.

**Palavras-chave:** Grafos de Harary, confiabilidade, conectividade de aresta, grafos purificados.

#### Abstract

*The reliability of a network is its probability to remain connected after vertices or edges failures. In this paper, assuming that vertices are reliable and that an edge subset can fail, we present network models with maximum reliability when the number of vertices and edges are previously known and also designed algorithms in order to build such graphs.*

**Keywords:** Harary graphs, reliability, edge connectivity, purified graphs.

#### 1. INTRODUÇÃO

A enorme quantidade de dados gerados diariamente tem motivado o surgimento de inúmeros modelos matemáticos e estatísticos com a finalidade de extrair informações relevantes da massa de dados. Uma alternativa para a representação desses dados é a construção de modelos de redes. Redes são sistemas físicos, biológicos ou sociais caracterizados por um conjunto de entidades bem definidas que interagem dinamicamente entre si. Podem ser destacadas algumas aplicações destes modelos: a rede *web da internet*, que representa a conexão entre diversas páginas da internet, Barabasi *et al.* (1999); o *marketgraph*, que representa as interações entre ativos numa bolsa de valores, Boginski *et al.* (2006); a rede *callgraph*, que representa as chamadas entre número telefônicos, Abello *et al.* (1999) e Aiello *et al.* (2001) e as redes de cadeias de suprimentos, que representam as

relações entre fornecedores e pontos de demanda, Kim *et al.* (2011).

Um grafo é uma estrutura abstrata definida por um conjunto de vértices e um conjunto de ligações ou arestas que representam as relações entre os vértices. Esta estrutura é amplamente utilizada para representar uma rede com a finalidade de avaliar suas características topológicas e auxiliar o processo de tomada de decisão do problema de rede que modela uma situação do mundo real. Um grafo é dito probabilístico quando há probabilidades de falha associada às arestas e/ou vértices. Conceitos advindos da Teoria dos Grafos e da Análise de Redes Sociais, tais como medidas de vulnerabilidade, de centralidade e de confiabilidade, que são parâmetros informativos acerca da topologia da rede, são utilizados para a identificação de vértices mais centrais da rede, para avaliar a confiabilidade do sistema, ou ainda, para construir desenhos de novas topologias de redes. Em particular, descrever estruturas de grafos com máxima confiabilidade a partir de um conjunto de vértices e arestas



previamente fixados é o foco desse artigo cujo objetivo é, dada uma função de confiabilidade, definida por Kelmans (1966), apresentar as principais topologias de rede mais confiáveis presentes na literatura para essa medida. Desse modo, pretendemos com este trabalho: (i) reunir num único documento os principais conceitos e resultados sobre o assunto; (ii) fornecer um procedimento para construção de redes confiáveis a partir de alguns parâmetros de entrada; (iii) indicar procedimentos de avaliação de confiabilidade de uma rede já existente em comparação com uma rede de confiabilidade idealmente ótima.

Para isso, este artigo está organizado do seguinte modo: a Seção 2 apresenta notações e conceitos teóricos necessários à compreensão do texto; a Seção 3 apresenta a definição do problema; os procedimentos para a construção de redes confiáveis são apresentados na Seção 4.

## 2. CONCEITOS BÁSICOS

Considere  $G = (V, E)$  um grafo simples e não-orientado com conjunto de vértices  $V$  tal que  $|V| = n$  vértices e conjunto de arestas  $E$ , tal que  $|E| = e(G)$ . A conectividade de arestas de  $G$ , denotada por  $\lambda(G)$ , é o menor número de arestas que devem ser removidas para desconectar  $G$ . Um conjunto de corte de arestas é um subconjunto  $S$  de  $E$  tal que a retirada de  $G$  dos elementos de  $S$  desconecta o grafo. O  $i$ -ésimo cardinal de conectividade de arestas, denotado por  $m_i(G)$ , é definido como a quantidade de conjuntos de cortes de arestas com cardinalidade  $i$ . O grau mínimo de  $G$ ,  $\delta(G)$ , é o menor número de arestas incidentes a um vértice de  $G$ . A Figura 1 representa um grafo com  $n=5$  e  $e(G) = 7$ . Observe que para este grafo,  $\lambda(G) = 2$ , já que a retirada das arestas (1,2) e (2,4) desconecta  $G$ , não sendo possível desconectá-lo com a retirada de menos do que duas arestas. Por outro lado, existem somente dois conjuntos de arestas,  $\{(1,2),(2,4)\}$  e  $\{(1,3),(3,5)\}$  que, ao serem removidas de  $G$ , o desconectam. Portanto, o número de conjuntos de corte de cardinalidade 2 é  $m_2(G) = 2$ . Embora o grafo  $H$  tenha o mesmo número de vértices e de arestas de  $G$  e a mesma conectividade de arestas, o cardinal de conectividade de  $G$  é diferente do de  $H$  e isso parece indicar a importância de se investigar outros parâmetros para a avaliação de vulnerabilidade de redes.

A vulnerabilidade de uma rede pode ser entendida como a propensão da mesma ser desconectada após a remoção de um subconjunto de vértices e/ou arestas da rede. A determinação de vulnerabilidade de uma rede envolve o cálculo de parâmetros determinísticos do grafo que a modela. Dentre estes, estão os parâmetros clássicos de conectividade, como a conectividade de arestas e a conectividade de vértices; a conectividade algébrica, que

é um parâmetro espectral, e parâmetros não-tradicionais, tais como, o cardinal de conectividade de arestas, o cardinal de conectividade de vértices e a resistência de um grafo (do Inglês, *toughness*).

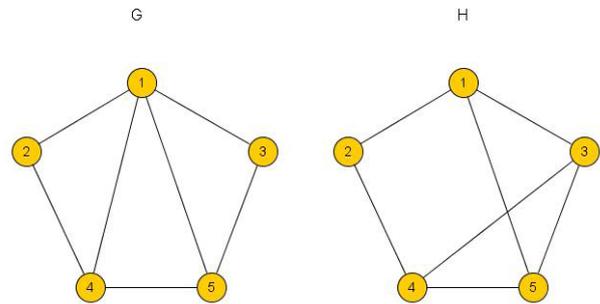


Figura 1: Grafo com  $\lambda(G) = 2$ ,  $m_2(G) = 2$ ,  $\lambda(H) = 2$  e  $m_2(H) = 1$   
 (Fonte: Próprios autores, 2013)

A confiabilidade de uma rede é a probabilidade que esta tem de permanecer conexa mesmo após a remoção de um subconjunto de seus vértices e/ou arestas. Em geral, à confiabilidade estão associadas medidas probabilísticas. Assim, redes altamente confiáveis são estruturas fortes, com altas probabilidades de falha associadas às suas arestas e/ou vértices. Diz-se que uma rede é mais confiável que outra, se a probabilidade da primeira se desconectar é menor que a da segunda.

Kelmans (1966) definiu a probabilidade do grafo se tornar desconexo após a falha de algumas de suas arestas através da função,

$$(1) \quad \hat{P}(G, \rho) = \sum_{i=1}^{e(G)} m_i \rho^i (1 - \rho)^{e(G)-i},$$

em que os vértices são considerados confiáveis e, para cada aresta, uma probabilidade de falha  $\rho \in (0,1)$  é atribuída.

Embora a função (1) seja probabilística devido à presença do parâmetro  $\rho$ , ela também envolve parâmetros de vulnerabilidade que são determinísticos, como a conectividade de aresta,  $\lambda = \lambda(G)$ , e o  $i$ -ésimo cardinal de conectividade de aresta,  $m_i(G)$ . Um grafo  $G^*$  com  $n$  vértices e  $e(G^*)$  arestas é considerado ótimo em relação à confiabilidade quando, para todo grafo  $G$  não isomorfo a  $G^*$ , ambos com  $n$  vértices e  $e(G)$  arestas, tem-se que  $P(G^*, \rho) < P(G, \rho)$ , para qualquer  $\rho \in (0,1)$ . Em outras palavras, a função  $P(G, \rho)$  atinge seu valor mínimo no grafo  $G^*$  e minimização de  $P(G, \rho)$  envolve tanto a maximização de  $\lambda(G)$  quanto a minimização de  $m_i(G)$ , para cada  $i = \lambda, \dots, e(G)$ . Vários outros trabalhos



publicados abordam sobre diferentes aspectos a questão da confiabilidade em redes a partir da função (1), dentre os quais podemos citar: Wang e Zhang (1997), Reis e Neto (2005), Xu e Lu (2005) e Teixeira (2008).

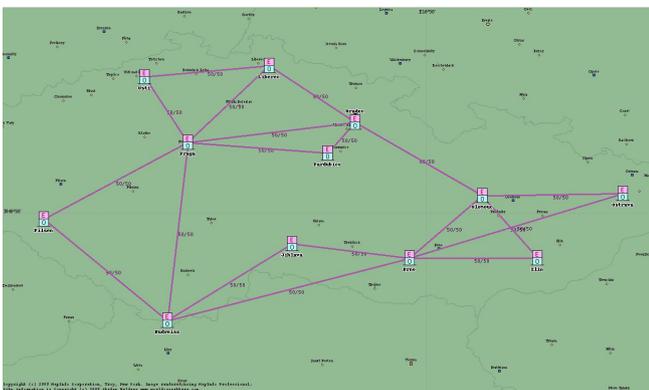
Bauer *et al.* (1985) provaram que os grafos mais confiáveis de acordo com a função (1) podem ser classificados da seguinte forma: (i) quando  $\lambda > 3$ , tais grafos pertencem a um dado subconjunto dos grafos de Harary; (ii) quando  $\lambda = 2$ , os mais confiáveis são os grafos subdivisão uniforme. Neste trabalho, estas classes de grafos são apresentadas.

A determinação de  $m_i(G)$  para todo  $i$  é um problema computacionalmente difícil. Para casos reais, isto acarreta enorme dificuldade na determinação do parâmetro  $P(G, \rho)$ , dado pela expressão (1), em que o número de arestas e de vértices do grafo tende a ser muito grande. Bauer *et al.* (1985) sugerem que, para valores pequenos de  $\rho$ , o cálculo de  $P(G, \rho)$  possa ser reduzido apenas ao cálculo do primeiro termo da expressão de (1), quando  $i$  é igual à conectividade de arestas  $\lambda$ . Entretanto, em exemplos práticos, pode ocorrer que o segundo termo de (1) seja significativo. Desta forma, sugere-se uma aproximação de (1) pela seguinte expressão:

$$(2) \quad P(G, \rho) = m_\lambda \rho^\lambda (1 - \rho)^{m-\lambda} + m_{\lambda+1} \rho^{\lambda+1} (1 - \rho)^{m-\lambda-1}.$$

Para exemplificar o fato de que o segundo termo de (2) é importante, realizamos o cálculo dos conjuntos de corte e de confiabilidade para o grafo com 12 vértices e 19 arestas que representa a rede real *Czech Education and Scientific Network* (CESNET).

Figura 2: Rede CESNET



Fonte: Pinto (2013)

É fácil ver que a rede CESNET tem conectividade de arestas igual a 2. Os dados de confiabilidade da rede e os conjuntos de corte são dados na Tabela 1 abaixo:

$n$	$e(G)$	$m_2$	$m_3$	$P(G, \rho)$
12	19	168	926	0,23

Tabela 1: Parâmetros e Confiabilidade da Rede CESNET  
 (Fonte: Próprios autores, 2013)

Considerando somente o primeiro termo da função (2), a confiabilidade da rede é dada por 0,18, o que representa uma probabilidade de aproximadamente 82% da rede permanecer conexa mesmo após a falha em 2 arestas quaisquer. Ao considerar os dois termos da função (2), a confiabilidade da rede diminui para 77%, uma vez que a probabilidade de desconexão da rede dadas as falhas em 2 ou 3 arestas quaisquer da rede é dada por 0,23, conforme pode ser visto na Tabela 1. Dessa forma, a inclusão dos conjuntos de corte de ordem 3 é importante na avaliação da confiabilidade.

A questão da minimização da função (2) é essencial para que seja possível avaliar a confiabilidade de uma rede. Na literatura, este assunto é abordado seguindo os seguintes passos: (a) determinação dos grafos com máxima conectividade de aresta e mínima cardinalidade de conjuntos de corte de tamanho  $\lambda$ , denotados por grafos  $max \lambda$  &  $min m_\lambda$ ; (b) determinação dos grafos com máxima conectividade de aresta e mínima cardinalidade de conjuntos de corte de tamanho  $\lambda+1$ , denotados por  $max \lambda$  &  $min m_{\lambda+1}$ . Bauer *et al.* (1985) estudaram o caso (a), enquanto Wang *et Zang* (1997) estudaram o caso (b). Neste trabalho, o enfoque é estudar o caso (a).

Bauer *et al.* (1985) perceberam que a determinação de grafos que otimizem o primeiro termo da função (2), ou seja, grafos  $max \lambda$  &  $min m_\lambda$ , depende da relação entre os valores de  $n$  e  $e(G)$ , o que os levou a classificarem estes grafos em duas classes: a primeira constituída por grafos em que

$$\left\lfloor \frac{2e(G)}{n} \right\rfloor = 2$$

e outra por aqueles em que

$$\left\lfloor \frac{2e(G)}{n} \right\rfloor \geq 3.$$

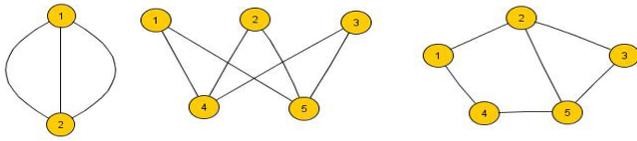
As seções seguintes são dedicadas à construção de família de grafos pertencentes a cada uma das classes referidas de forma que o primeiro termo da função (2) seja minimizado.

### 3. GRAFOS $MAX \lambda$ & $MIN M_\lambda$ QUANDO $\left\lfloor \frac{2e(G)}{n} \right\rfloor = 2$

Wang *et Zhang* (1997) exibiram a construção de uma classe de grafos  $max \lambda$  &  $min m_\lambda$  quando o quociente  $2e(G)/n = 2$  e observaram que estes grafos são construídos a partir de multigrafos denominados grafos purificados. Nessa seção, exibimos um algoritmo de geração de tais grafos.



Um multigrafo é um grafo que admite laços e arestas paralelas. Caminhos disjuntos por arestas são caminhos que não tem arestas em comum. Subdivisão de aresta em um grafo é uma operação que consiste na inclusão de um vértice de grau 2 a uma dada aresta. A Figura 3 exibe dois grafos  $K_{2,3}$  e  $C_5 + \{2,5\}$ , ambos obtidos por subdivisão de arestas a partir do multigrafo G inicialmente dado.



Multigrafo G (a)  $K_{2,3}$  (b)  $C_5 +$  uma aresta

Figura 3: Operação de subdivisão de arestas

(Fonte: Próprios autores, 2013)

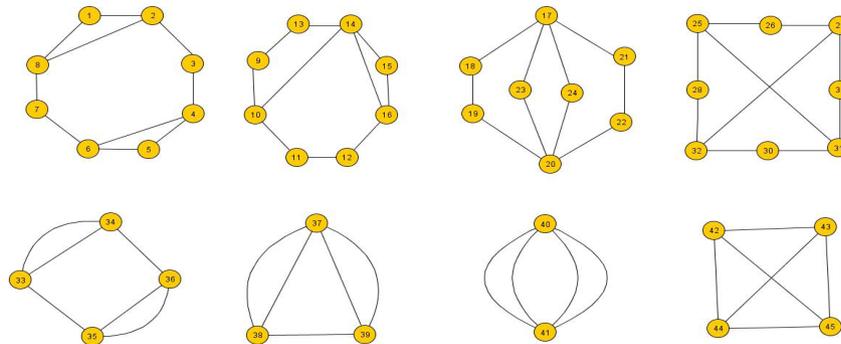


Figura 4: Grafos e seus respectivos grafos purificados

(Fonte: Bauer et al. (1985))

Dessa forma, se um grafo G resulta de sucessivas subdivisões uniformes de um multigrafo  $P(G)$ , então  $P(G)$  resulta de sucessivas contrações de G. Veja, na Figura 4, como todos os multigrafos  $P(G)$  são contrações dos respectivos grafos G que estão na parte superior.

Bauer et al. (1985) provaram que os grafos que obedecem à relação

$$\left\lfloor \frac{2e(G)}{n} \right\rfloor = 2$$

e que possuem máxima confiabilidade são aqueles obtidos a partir de sucessivas subdivisões uniformes nas arestas de um grafo purificado com conectividade de aresta  $\lambda = 3$ .

Dados  $n$  e  $e(G)$ , tais que

$$\left\lfloor \frac{2e(G)}{n} \right\rfloor = 2,$$

o grafo purificado é o grafo 3-regular com  $2(e(G)-m)$  vértices e  $3(e(G)-m)$  arestas e sucessivas subdivisões de

Dizemos que uma subdivisão é uniforme se a operação de subdivisão é executada em todas as arestas. Um grafo purificado  $G'$  é um multigrafo obtido de um grafo G qualquer por sucessivas *contrações por caminhos* aplicados a todos os caminhos disjuntos por arestas de G. O processo que engloba o conjunto de operações que resultam em  $G'$  por sucessivas contrações de caminhos disjuntos por arestas de G (de modo a envolver todos os caminhos disjuntos) é chamado de *purificação do grafo G* e o grafo resultante é denotado por  $G' = P(G)$ . Os grafos da Figura 4 (dispostos na parte superior da figura) são exemplos de grafos com  $\lambda = 2$ ,  $n = 8$  e  $e(G) = 10$  cujos respectivos grafos purificados  $P(G)$  se encontram na parte inferior.

arestas determinam o grafo com maior confiabilidade. O algoritmo descrito no Quadro 1 mostra como obter o grafo com máxima confiabilidade a partir do grafo purificado.

Quadro 1 - Algoritmo para construção de grafos em  $G_{2,m_2}(n, m)$

<p><b>Dados de entrada:</b> <math>n, e(G) \in Z_+^*</math> tal que <math>\left\lfloor \frac{2e(G)}{n} \right\rfloor = 2</math></p> <p><b>Saída:</b> Grafo G</p> <p><b>Início</b></p> <p>1 <math>t = e(G) - n;</math></p> <p>2 (Grafo Purificado)                  Construa o grafo <math>G'</math> com <math>2t</math> vértices, <math>3t</math> arestas e 3-regular</p> <p>3 <math>k = \left\lfloor \frac{n-2t}{3t} \right\rfloor</math></p> <p>4 Construir o grafo G a partir de <math>k</math> subdivisões uniforme no grafo purificado <math>G'</math></p> <p>5 <math>n_k = 2t + 3kt</math></p> <p>6 <math>m_k = (k+1)3t</math></p> <p>7 Se <math>(n_k \neq n</math> e <math>m_k \neq m)</math> então <math>L =  m - m_k </math></p> <p>8 Insira 1 vértice de grau 2 em <math>L</math> arestas distintas de G</p> <p><b>Fim</b></p>
---

Fonte: Próprios autores (2013)



A Figura 6 apresenta um exemplo de execução do algoritmo do Quadro 1 com entrada de dados sendo  $n = 11$  e  $e(G) = 13$ . Observe que o grafo (a) da Figura 6 é o grafo purificado obtido ao final do passo 2 e o grafo G é o grafo (b).

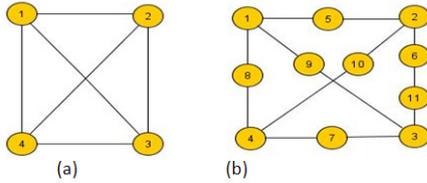


Figura 6: Grafos em (b) e (c) resultantes da subdivisão uniforme de arestas em (a).

Fonte: Próprios autores (2013)

#### 4. GRAFOS $MAX \Delta$ & $MIN M_{\Delta}$ QUANDO QUANDO $\lfloor \frac{2e(G)}{n} \rfloor \geq 3$

Bauer et al. (1985) provaram que os grafos mais confiáveis

que atendem à restrição  $\lfloor \frac{2e(G)}{n} \rfloor \geq 3$  são grafos de Harary. Essa classe de grafos foi introduzida por Harary (1969), que desenvolveu um procedimento para construir grafos

$k$ -conexo com  $n$  vértices e  $\lfloor \frac{kn}{2} \rfloor$  arestas. Os grafos resultantes do procedimento proposto por Harary são extremais em relação ao número mínimo de arestas e têm a propriedade de que a conectividade de vértice, a conectividade de aresta e o grau mínimo do grafo são simultaneamente iguais a

$$\lfloor \frac{2e(G)}{n} \rfloor.$$

Os grafos de Harary podem ser classificados em duas categorias: a dos *Grafos Elementares de Harary*, que são ainda subdivididos em dois tipos,  $H_0$  e  $H_1$ ; e a dos *Grafos*

*Gerai de Harary*, subdivididos em grafos do tipo  $H_2$  ou  $H_3$ . Os trabalhos de Wang et Zhang (1997) e Deng et al. (2004) apresentam as ideias de construção dos grafos do tipo  $H_2$  e  $H_3$ . Reapresentamos no Quadro 2 o algoritmo de Hakimi (1969) para gerar os grafos de Harary de todos os tipos, consolidando os resultados obtidos por Harary (1969), Bauer et al. (1985), Wang et Zhang (1997) e Deng et al. (2004).

Quadro 2: Algoritmo de Hakimi

**Dados de entrada:** Grafo  $G=(V,E)$  tal que  $V=\{1,\dots,n\}$  e  $E=\emptyset$ ;  $n, e(G) \in \mathbb{Z}_+$

**Saída:** Grafo de Harary H

**Início**

- 1  $k \leftarrow \lfloor \frac{e(G)}{n} \rfloor$
- 2  $r \leftarrow e(G) - kn$
- 3 Para  $p = 1, \dots, k$   
 Para  $i = 1, \dots, n-1$   
 Para  $j = i + 1, \dots, n$   
 Se  $(j-i) \bmod n = p$  ou  $(i-j) \bmod n = p$  então  
 $E \leftarrow E \cup \{i, j\}$
- 4  $s \leftarrow \min \left\{ r, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \right\}$
- 5 Para  $i = 1, \dots, s$   
 $j = i + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$   
 $E \leftarrow E \cup \{i, j\}$

Fim\_Para

4 Se  $r > s$  então  
 Conecte de modo aleatório  $(r-s)$  pares de vértices não adjacentes no grafo corrente.

**Fim**

Fonte: Hakimi (1969)

A Figura 11, exhibe a construção do grafo de Harary com  $n = 5$  e  $e(G) = 7$  após a execução do Algoritmo de Hakimi.

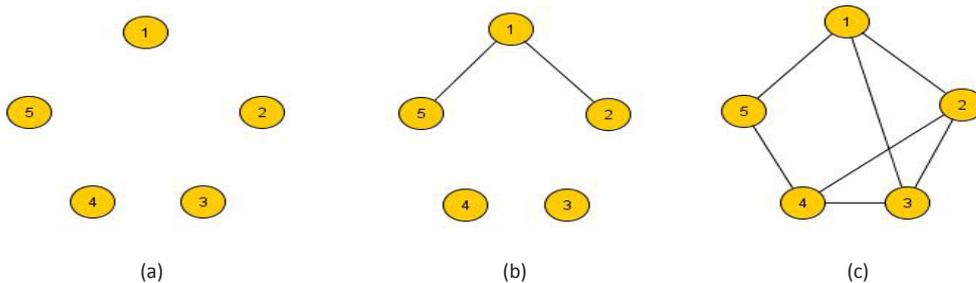


Figura 11 – Construção do grafo de Harary pelo algoritmo de Hakimi [Fonte: Próprios autores, 2013]



O procedimento descrito acima constrói grafos extremais em relação à máxima conectividade de vértice e aresta. Porém, isto ainda não é suficiente para garantir que tais grafos modelam redes confiáveis, pois, para minimizar a função de confiabilidade (2) é preciso mostrar que os grafos de Harary, construídos pelo Algoritmo de Hakimi, têm mínimo  $m_\lambda$ .

Lima (2006) classificou os grafos de Harary de acordo com a sequência de graus, conforme pode ser visto na Proposição 1. Desse modo, os grafos de Harary são classificados em seus subtipos: os que se enquadram no item (i) são do tipo  $H_0$ ; aqueles do item (ii), são do tipo  $H_1$ ; os grafos do item (iii) são do tipo  $H_2$  e, finalmente, os do item (iv), são do tipo  $H_3$ .

Proposição 1 (Lima, 2006): Seja  $H$  um grafo de Harary com  $n$  vértices e  $e(G)$  arestas tal que  $e(G) = qn + r$ , tal que

$0 \leq r \leq n - 1$  e  $q = \lfloor \frac{e(G)}{n} \rfloor$ . Então, todas as propriedades dada a seguir são verdadeiras:

1. se  $r = 0$ ,  $H$  é um grafo  $2q$ -regular;
2. se  $n$  é par e  $r = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ , o grafo  $H$  é  $(2q + 1)$ -regular; se  $n$  é ímpar, existem  $n-1$  vértices com grau mínimo  $\delta(G) = 2q + 1$  e somente um vértice com grau  $2q + 2$ ;
3. se  $0 < r < \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ , o grafo  $H$  tem  $2r$  vértices com grau  $2q + 1$  e  $n - 2r$  vértices com grau  $2q$ ;
4. se  $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor < r < n-1$ ,  $H$  tem grau mínimo  $\delta(G) = 2q + 1$  e grau máximo no intervalo  $\delta(G) + 1 \leq \Delta(G) \leq \delta(G) + r - \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ .

As Proposições 2 e 3 a seguir são importantes por garantir que é possível a obtenção de grafos de Harary com confiabilidade ótima, ou seja, grafos  $max \lambda$  &  $min m_\lambda$ . Isto resulta da aplicação do Algoritmo de Hakimi, valendo ressaltar que os grafos  $H_2$  e  $H_3$  são obtidos a partir da inserção de arestas aleatórias independentes (ou não incidentes) nos grafos base  $H_0$  e  $H_1$ , respectivamente.

Proposição 2 (Bauer *et al.*, 1985) Todo grafo de Harary  $H_0(q)$  e  $H_1(q)$  é  $max \lambda$  &  $min m_\lambda$ .

Proposição 3 (Bauer *et al.*, 1985) Para todos os números naturais  $n$  e  $m$  tais que  $\frac{2m}{n} \geq 3$ , há grafos de Harary  $H_2$  e  $H_3$  que são  $max \lambda$  &  $min m_\lambda$ .

Para a construção de um grafo  $H_2$  ou  $H_3$  com máxima confiabilidade, deve-se inserir as arestas aleatórias, conforme determina o Passo 4 do Algoritmo de Hakimi, de modo que as mesmas sejam independentes entre si o tanto

quanto possível. A Figura 12 apresenta os grafos  $H_2^1$  e  $H_2^2$  obtidos a partir da inserção de duas arestas aleatórias no grafo base  $H_0$ . Assim, tem-se  $H_2^1$  a partir da inserção de {2,6}

e {3,6}, ambas incidentes ao vértice 6 em  $H_0$ . Já o grafo  $H_2^2$  é obtido de  $H_0$  com a inserção das arestas independentes {1,4} e {2,5}. Observe que o número de conjuntos de corte de

tamanho  $\lambda = 4$  em  $H_2^1$  é maior que em  $H_2^2$ . Isto se deve à inserção de arestas independentes no Passo 4 do Algoritmo

de Hakimi. Desse modo, pode-se provar que  $H_2^2$  é  $max \lambda$  &  $min m_\lambda$  e que, portanto, tem máxima confiabilidade dentre todos os grafos com 7 vértices e 16 arestas.

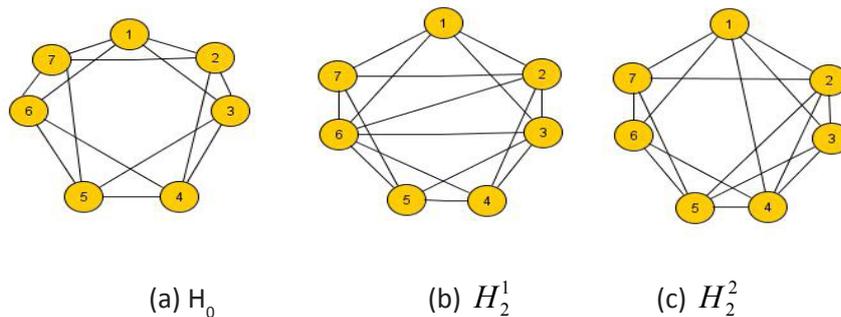


Figura 12: Subgrafo gerador  $H_0$  e grafos de Harary do tipo  $H_2$

[Fonte: Próprios autores, 2013].



## 5. CONCLUSÕES

Este trabalho reúne os principais resultados sobre grafos que modelam redes com a máxima confiabilidade quando são dados o número de vértices e o número de arestas. Uma importante contribuição deste artigo é a apresentação de algoritmos para a construção dos grafos de Harary e dos grafos purificados que tenham a máxima confiabilidade. O interesse prático por redes que sigam o modelo de grafos de Harary é justificável para projetos de redes e também como referência para avaliar a confiabilidade de redes já existentes.

## 6. REFERÊNCIAS

Abello, J., Pardalos, P.M. e Resende, M.G.C. (1999), "On maximum clique problems in very large graphs", DIMACS Series, 50, *American Mathematical Society*, pp. 119-130.

Aiello, W., Chung, F. e Lu, L. (2001), "A random graph model for power law graphs", *Experimental Math.* 10, pp. 53-66.

Barabasi, A. e Albert, R. (1999), "Emergence of Scaling in Random Networks", *Science*, v. 286, pp. 509-512.

Bauer, D., Boesch, F., Suffel, C. (1985), "Combinatorial optimization problems in the analysis and design of probabilistic networks", *Networks*, v.15, pp. 257-271.

Boginski, V., Sergiy Butenko, S. e Pardalos, P.M. (2006), "Mining market data: A network approach", *Computers & Operations Research*, v. 33 (11), pp. 3171-3184.

Hakimi, S.L. (1969), "An algorithm for construction of the least vulnerable communication network or the graph with maximum connectivity", *IEEE Transaction on Circuit Theory*, pp. 229-230.

Kelmans, A. (1966), "Connectivity of probabilistic networks", *Automatic Telemekhanika*, v.3, pp.98-116.

Kim, Y., Choi, T.Y., Yan, T. e Dooley, K. (2011), "Structural investigation of supply networks: A social network analysis approach", *Journal of Operation Management*, Vol.29 No.1, pp. 194-211.

Lima, L.S. (2006), Vulnerabilidade de redes em grafos de Harary, Tese de Doutorado em Engenharia de Produção, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

Pinto, A.N. (2013), Real-world survivable transport networks, Disponível em: <http://www.av.it.pt/anp/on/refnet2.html>. Acesso em: Abril de 2013.

Reis Neto, B.M. (2005), Um survey sobre parâmetros de vulnerabilidade em redes, Dissertação de Mestrado em Engenharia de Produção, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.

Teixeira, L.S. (2008), Grafos que modelam redes confiáveis, Mestrado em Engenharia de Produção, COPPE, Universidade do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

Xu, L., Lü, M. (2005), "Super connectivity of line graphs", *Inform. Process. Letters*, v. 95, pp. 191-195.

Wang, G., Zhang, L., (1997), "The structure of max  $\lambda$  - min  $m_{\lambda+1}$  graphs used in the design of reliable networks", *Networks*, v. 30, pp. 231-242.