

Implementação computacional em *S-PLUS* de testes estatísticos multivariados e suas aplicações em controle de qualidade

Fernanda Karine Ruiz Colenghi¹, fernanda.colenghi@gmail.com

Sueli Aparecida Mingoti², sueliam@est.ufmg.br

¹ Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Mestrado em Estatística
Belo Horizonte, MG, Brasil

² Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Professora do corpo docente da Graduação e Pós-Graduação em Estatística, MG, Brasil

*Recebido: Novembro, 2007 / Aceito: Dezembro, 2007

RESUMO

Com as exigências de um mercado cada vez mais competitivo, as empresas necessitam de certificados de controle de qualidade do processo de produção ou serviços. Nesse contexto, o controle de qualidade multivariado aparece como uma ferramenta extremamente importante para avaliar várias características que afetam direta e simultaneamente a qualidade final de determinado produto. Devido a esses fatores vemos a importância do estudo das técnicas estatísticas multivariadas para controle de processos. Neste artigo apresentamos conceitos de alguns testes estatísticos multivariados, tais como o de T^2 de HOTELLING (1947), o de HAYTER e TSUI (1994) e o de MUDHOLKAR e SRIVASTAVA (2000). Além disso, mostramos um exemplo com a implementação computacional destas metodologias usando a linguagem de programação do software estatístico S-Plus (VENABLES e RIPLEY, 2003 e REIS, 1997).

Palavras-Chave: Controle de processos multivariados. Testes estatísticos stepwise. Médias aparadas.

1. INTRODUÇÃO

No processo de produção da maioria das indústrias, é comum utilizar-se técnicas estatísticas de controle de qualidade para avaliar a qualidade final de um determinado produto bem como do processo de produção em questão. A situação mais comum é aquela em que o processo é monitorado por várias características que afetam direta e simultaneamente a qualidade final do produto, o que dá origem ao controle de processos multivariados. Nesse caso, a aplicação de gráficos de controle pode ser feita analisando-se

cada característica separadamente através de gráficos de controle de Shewhart (MONTGOMERY, 2004), no entanto esta análise não é eficaz e pode levar a conclusões errôneas. Portanto, torna-se importante o estudo de métodos estatísticos multivariados, que consideram a informação de todas as variáveis em conjunto.

Dentro da área de testes de hipóteses multivariados encontra-se o teste T^2 de HOTELLING (1947) para comparação de vetores de médias populacionais. Vários artigos podem ser encontrados na literatura propondo o seu uso para testar a hipótese de controle do processo considerando-se todas as características medidas conjuntamente. A partir do teste T^2 de Hotelling um elipsóide de confiança é construído, usando-se a distribuição de probabilidade conjunta das p características de qualidade, que permite verificar se o processo está ou não sob controle considerando-se todas as características simultaneamente. No entanto, a construção de regiões de confiança em termos gráficos torna-se impraticável quando $p \geq 4$ variáveis. Neste caso, o mais comum é transformar-se a informação multivariada para uma estatística unidimensional (ou bidimensional) que possa ser disponibilizada em termos gráficos. Uma das alternativas é o gráfico univariado T^2 de Hotelling. Outra é a sumarização da informação multivariada em combinações lineares (JOHNSON e WICHERN, 2002), chamadas de componentes principais (MINGOTI, 2001, 2005). Uma crítica em relação a este procedimento é que nem sempre as componentes têm uma interpretação que faz sentido para o usuário que está supervisionando o processo. No entanto, pode constituir numa técnica importante para síntese de variáveis criando-se então, índices globais de qualidade do processo (JACKSON, 2003).

O uso de gráficos de controle multivariados é recente e algumas referências interessantes de aplicação são: MASON et. al. (2001), MASON et. al. (1997) e NOMIKOS e MACGREGOR (1995) que fazem uma espécie de sumário sobre o uso da estatística T^2 . Uma possível crítica ao uso desse teste para avaliar o processo vem do fato de que no momento em que a hipótese nula é rejeitada torna-se necessário identificar as características de qualidade responsáveis pela sua rejeição, o que muitas vezes é feito através de gráficos de Shewhart (MONTGOMERY, 2004) para cada variável isoladamente, corrigindo-se ou não, os níveis de significância dos testes feitos separadamente para a média de cada característica. Testes de comparações múltiplas de Bonferroni (JOHNSON e WICHERN, 2002), por exemplo, podem ser usados, no entanto esses não levam em consideração a correlação entre as variáveis respostas. Algumas alternativas ao teste T^2 de Hotelling estão publicadas na literatura, dentre elas citam-se HAYTER e TSUI (1994), TIKU e SINGH (1982), TIKU e BALAKRISHNAN (1988), MUDHOLKAR e SUBBAIH (1980), MUDHOLKAR e SRIVASTAVA (1999) e mais recentemente os testes *stepwise* robustos de MUDHOLKAR e SRIVASTAVA (2000) que segundo os autores, é mais poderoso que o teste T^2 de Hotelling inclusive para amostras de tamanho pequeno sendo mais robusto em relação a desvios da normalidade multivariada.

Alguns destes testes multivariados não estão implementados em *softwares* estatísticos. Mesmo aqueles que estão disponíveis, não estão no formato padrão da área de controle estatístico de qualidade. Neste artigo, além de explicarmos as técnicas estatísticas, apresentamos a implementação computacional em *S-Plus* (VENABLES e RIPLEY, 2003; REIS, 1997) dos testes: T^2 de Hotelling; de HAYTER e TSUI e MUDHOLKAR e SRIVASTAVA (2000).

2. GRÁFICO T^2 DE HOTELLING

O gráfico de controle de T^2 de Hotelling, chamado de gráfico qui-quadrado, é usado para monitoramento do vetor de médias do processo. Ele é um análogo direto do gráfico de \bar{X} de Shewhart univariado. Mostramos a seguir, duas versões do gráfico T^2 de Hotelling: uma para dados em subgrupos e outra para observações individuais.

2.1. DADOS EM SUBGRUPOS

Suponha que a distribuição de probabilidade conjunta das p características da qualidade, isto é, do vetor $X = (X_1, X_2, \dots, X_p)'$, seja a normal p -variada. Sejam $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ os valores médios das características de qualidade e Σ a matriz de covariâncias da distribuição dessas características. A partir de uma amostra aleatória de tamanho n do processo observa-se o vetor aleatório X que é medido em cada um dos n elementos amostrais. Quando $n > 1$ o procedimento de amostragem é chamado de dados em subgrupos.

O procedimento requer o cálculo da média amostral para cada uma das p características de qualidade a partir de m amostras de tamanho n do processo. Esse conjunto de médias é representado pelo vetor de médias amostral $\bar{X} = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_p)'$. A estatística de teste para o gráfico de controle Qui-Quadrado para cada amostra i , $i = 1, 2, \dots, m$, quando μ e Σ são conhecidos é a T_i^2 dada por:

$$T_i^2 = n (\bar{X} - \mu)' \Sigma^{-1} (\bar{X} - \mu) \quad (1)$$

onde μ e Σ são os parâmetros do processo sob controle. O limite superior de controle é dado por $LSC = \chi_{1-\alpha, p}^2$, onde $\chi_{1-\alpha, p}^2$ é o valor obtido na distribuição Qui-Quadrado com p graus de liberdade correspondente a probabilidade acumulada de $(1-\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, ou seja, $P[\chi_p^2 \leq \chi_{(1-\alpha), p}^2] = 1 - \alpha$.

Na prática, em geral, é necessário estimar μ e Σ a partir de m amostras preliminares de tamanho n do processo, obtidas quando se admite que o processo está sob controle. Neste caso, as médias e variâncias amostrais para cada amostra são calculadas para cada variável X_i como usual, isto é,

$$\bar{X}_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{X}_{ijk} \quad \begin{cases} j = 1, 2, \dots, p \\ k = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (2)$$

$$S_{jjk} = S_{jk}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{ijk} - \bar{X}_{jk})^2 \quad \begin{cases} j = 1, 2, \dots, p \\ k = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (3)$$

onde X_{ijk} é a i .ª observação da j .ª característica da qualidade na k .ª amostra e \bar{X}_{jk} é a média das n observações na j .ª característica da k .ª amostra. A covariância amostral entre as características da qualidade j e h na k .ª amostra é dada por:

$$S_{jhk} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{ijk} - \bar{X}_{jk})(X_{ihk} - \bar{X}_{hk}) \quad \begin{cases} k = 1, 2, \dots, m \\ j \neq h \end{cases} \quad (4)$$

Tomam-se, então, as médias das estatísticas \bar{X}_{jk} , S_{jk}^2 , S_{jkh} sobre todas m amostras, obtendo-se:

$$\bar{\bar{X}}_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{X}_{jk} \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (5)$$

$$\bar{\bar{S}}_{jj} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_{jk}^2 \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (6)$$

$$\bar{\bar{S}}_{jh} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S_{jkh} \quad j \neq h \quad (7)$$

Sendo assim tem-se o vetor $\bar{\bar{X}} = (\bar{\bar{X}}_1, \bar{\bar{X}}_2, \dots, \bar{\bar{X}}_p)'$, e a matriz de covariâncias amostral S de dimensão $p \times p$ que é a média das m matrizes de covariâncias amostrais dada como em (8).

$$S = \begin{bmatrix} \bar{\bar{S}}_{11} & \bar{\bar{S}}_{12} & \bar{\bar{S}}_{13} & \dots & \bar{\bar{S}}_{1p} \\ & \bar{\bar{S}}_{22} & \bar{\bar{S}}_{23} & \dots & \bar{\bar{S}}_{2p} \\ & & \bar{\bar{S}}_{33} & & \vdots \\ & & & \ddots & \bar{\bar{S}}_{pp} \end{bmatrix} \quad (8)$$

A matriz S é um estimador não-viciado de Σ , quando o processo está sob controle (JOHNSON e WICHERN, 2002).

Suponha que S seja usada para estimar Σ , e que o vetor $\bar{\bar{X}}$ seja considerado o valor sob controle do vetor médio do processo. Neste caso, a estatística que deverá ser calculada para cada amostra k , $k = 1, 2, \dots, m$, e colocada no gráfico de controle é dada por:

$$T_k^2 = n(\bar{X}_k - \bar{\bar{X}})' S^{-1} (\bar{X}_k - \bar{\bar{X}}) \quad (9)$$

onde \bar{X}_k é o vetor de médias amostrais da k -ésima amostra.

ALT(1985) observou que, nas aplicações de controle de qualidade multivariado, deve-se ter cuidado na seleção dos limites de controle para a estatística T^2 de Hotelling, dependendo de como o gráfico esteja sendo usado. Há duas fases distintas no uso de um gráfico de controle. A Fase 1 é o uso dos gráficos para o estabelecimento dos limites de controle, isto é, testar se o processo estava, ou não, sob controle quando os m subgrupos preliminares foram extraídos e as estatísticas amostrais $\bar{\bar{X}}$ e S , calculadas. Essa fase só se aplica no caso em que μ e Σ são desconhecidos, uma vez que a amostragem preliminar não seria necessária para o estabelecimento dos limites de controle quando os parâmetros de interesse já são conhecidos. O objetivo, na fase 1, é a obtenção de um conjunto de observações sob controle, de modo que os limites de controle possam ser estabelecidos para a fase 2, que é o monitoramento da produção futura. Isto, às vezes, é chamado análise retrospectiva.

Os limites para o gráfico de controle T^2 na fase 1 são dados por:

$$LSC = \frac{p(m-1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha,p,mn-m-p+1} \quad \text{e} \quad LIC = 0 \quad (10)$$

Na fase 2, quando o gráfico T^2 é usado para monitorar a produção futura, os limites de controle são os seguintes:

$$LSC = \frac{p(m+1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha,p,mn-m-p+1} \quad \text{e} \quad LIC = 0 \quad (11)$$

Quando μ e Σ são estimados a partir de um grande número de amostras preliminares, costuma-se usar $LSC = \chi_{1-\alpha,p}^2$ como limite superior de controle em ambas as fases. O mesmo ocorre quando a matriz Σ é conhecida. A análise retrospectiva das amostras preliminares para testar o controle estatístico e estabelecer os limites de controle também ocorre no ambiente gráfico de controle univariado. Para o gráfico de controle univariado \bar{X} , se usarmos $m \geq 20$ ou 25 amostras preliminares, a distinção entre os limites da fase 1 e da fase 2 é, em geral, desnecessária, porque esses limites praticamente coincidirão. No caso em que o vetor de médias do processo μ é conhecido a estatística a ser plotada no gráfico para cada amostra k será:

$$T_k^2 = n(\bar{X}_k - \mu)' S^{-1} (\bar{X}_k - \mu) \text{ sendo o limites de controle}$$

neste caso dados por $LSC = \chi_{1-\alpha,p}^2$ e $LIC=0$.

2.2. OBSERVAÇÕES INDIVIDUAIS

Em alguns ambientes industriais como em indústrias químicas de processamento (MONTGOMERY, 2004), o tamanho do subgrupo é $n = 1$. Suponha que estejam disponíveis m amostras independentes do processo, cada uma tamanho $n = 1$, e que p seja o número de características de qualidade observadas em cada uma delas. Sejam \bar{X} e S , respectivamente, o vetor de médias amostral e a matriz de covariâncias amostral obtidas com essas m observações. Supondo-se que o vetor \bar{X} seja considerado o valor sob controle do vetor médio do processo, a estatística que deverá ser calculada para cada amostra k , e colocada no gráfico T^2 de Hotelling, $k = 1, 2, \dots, m$, é dada por:

$$T_k^2 = n(X_k - \bar{X})' S^{-1} (X_k - \bar{X}) \quad (12)$$

sendo X_k o vetor com os valores amostrais observados para a k -ésima amostra. Se o vetor de médias μ do processo for conhecido a estatística em (12) é calculada pela fórmula:

$$T_k^2 = n(X_k - \mu)' S^{-1} (X_k - \mu)$$

ou como

$$T_k^2 = n(X_k - \bar{X})' \Sigma^{-1} (X_k - \bar{X})$$

quando a matriz de covariâncias Σ do processo é conhecida.

SULLIVAN e WOODALL (1995) fornecem discussões e análises de vários estimadores da matriz de covariâncias, no entanto neste artigo usamos a matriz de covariâncias amostral S definida por:

$$S_{p \times p} = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m (X_k - \bar{X})(X_k - \bar{X})' \quad (13)$$

TRACY et al. (1992) enfatizam que, se $n = 1$, os limites da fase 1 devem basear-se em uma distribuição Beta. Da mesma forma que foi visto para dados em subgrupos, a análise da fase 1 só é realizada quando μ e Σ são desconhecidos. Neste caso, os limites de controle são:

$$LSC = \frac{(m-1)^2}{m} \beta_{\alpha, p/2, (m-p-1)/2} \quad \text{e} \quad LIC = 0 \quad (14)$$

onde $\beta_{\alpha, p/2, (m-p-1)/2}$ é a ordenada correspondente ao percentil de ordem $(1-\alpha)$ da distribuição Beta com parâmetros $p/2$ e $(m-p-1)/2$. Segundo TRACY et al. (1992) as aproximações pela F e Qui-Quadrado na fase 1, quando $n=1$, serão, provavelmente, imprecisas para determinar os limites de controle. Os limites de controle da fase 2 para o processo são:

$$LSC = \frac{p(m+1)(m-1)}{m^2 - mp} F_{\alpha, p, m-p} \quad \text{e} \quad LIC = 0 \quad (15)$$

2.3 INTERPRETAÇÃO DOS SINAIS FORA DE CONTROLE

Quando se observa na fase 2 algum valor numérico de T^2 fora dos limites de controle, é de importante detectar quais das p variáveis são responsáveis por esse sinal. A abordagem que utilizamos neste artigo é aquela proposta por RUNGER et al. (1996b.) que sugerem a decomposição da estatística T^2 em componentes que refletem a contribuição de cada variável individualmente. Se T_k^2 é o valor da estatística para a respectiva amostra k que sinalizou a falta de controle do processo, e se $T_{(j)}^2$ é o valor da estatística para amostra k considerando-se todas as variáveis do processo exceto a j -ésima, tem-se que:

$$d_j = T^2 - T_{(j)}^2 \quad (16)$$

é um indicador da contribuição relativa da j^{a} variável para a estatística global. Deve-se ter atenção nas variáveis que geram d_j 's relativamente grandes. Além disso, os autores sugerem que seja usado o valor $\chi_{1-\alpha,p}^2$ da distribuição qui-quadrado como um ponto de corte aproximado para a magnitude de um d_j individual, sendo $\chi_{1-\alpha,p}^2$ a ordenada correspondente ao percentil de ordem $(1-\alpha)$ da distribuição Qui-Quadrado com 1 grau de liberdade. Nesse caso, pode-se testar a significância de d_j usando um valor de nível de significância α fixo para o teste ou através do cálculo da probabilidade de significância.

Para um melhor entendimento desse procedimento, ilustraremos com o exemplo de RUNGER et al. (1996a.). Há três características de qualidade, a matriz de covariâncias é conhecida e a matriz de correlação é como se segue:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,9 & 0,9 \\ 0,9 & 1 & 0,9 \\ 0,9 & 0,9 & 1 \end{bmatrix}$$

A média do processo é $\mu' = [0, 0, 0]$.

A Tabela 1, mostra os valores de $d_j = T_k^2 - T_{(j)}^2$ calculados para cada característica de quatro vetores amostrais. Como Σ é conhecida, o limite superior de controle para o gráfico é igual a $\chi_{0,01;1}^2 = 6,36$. Qualquer d_j que exceder esse valor é uma indicação de que a variável j , da correspondente amostra é responsável pelo processo estar fora de controle. A decomposição de T^2 fornece uma diretriz sobre quais variáveis afetam mais acentuadamente o valor de T^2 . Pela Tabela 1, observa-se que a variável 1 na amostra 1; as variáveis 1, 2 e 3 na amostra 2; 1 e 2 na amostra 3 e 3 na amostra 4, são as responsáveis pelo sinal de fora de controle do processo.

Tabela 1. Representação da variável T^2 decomposta para cada variável

Vetor de amostras X'	Valor de T_0^2 observado	d_1	d_2	d_3	p-valores		
					Variável 1	Variável 2	Variável 3
(2,0,0)	27,14	27,14	6,09	6,09	0,0000	0,0136	0,0136
(1,1,-1)	26,79	6,79	6,79	25,73	0,0092	0,0092	0,0000
(1,-1,0)	20,00	14,74	14,74	0	0,0001	0,0001	1,0000
(0,5;0,5;1)	15,00	3,69	3,68	14,74	0,0547	0,0551	0,0001

3. MÉTODO DE HAYTER & TSUI

Como uma alternativa para o teste de HOTELLING, HAYTER e TSUI (1994) propuseram um método que além de descobrir quais variáveis estão sinalizando a situação fora de controle, fornece também informações sobre a possível alteração ocorrida nos valores de média do processo através da construção de intervalos de confiança para a média verdadeira de cada uma das p -variáveis. Além disso, ao contrário de metodologias como a de Bonferroni, os intervalos são construídos de modo que a constante de referência que determina a abertura dos intervalos seja a mesma para todas as variáveis, sendo que a obtenção dessa constante leva em consideração a estrutura de correlação existente entre as variáveis.

Seja $X = (X_1, X_2, \dots, X_p)'$ o vetor contendo as p características de qualidade de interesse, com distribuição Normal p -variada e com vetor de médias $\mu^0 = (\mu_1^0, \mu_2^0, \dots, \mu_p^0)'$ e matriz de covariâncias Σ . De acordo com Hayter e Tsui, para cada variável X_i os limites de confiança de $(1-\alpha)100\%$ para a média de sua distribuição, são dados pela equação:

$$P \left[\left| \frac{X_i - \mu_i^0}{\sigma_i} \right| \leq C_{R,\alpha}, \forall i = 1, 2, \dots, p \right] = 1 - \alpha \quad (17)$$

o que significa dizer que a probabilidade de que o intervalo $[X_i - \sigma_i C_{R,\alpha}; X_i + \sigma_i C_{R,\alpha}]$ contenha o verdadeiro valor de μ_i^0 para todo $i, i = 1, 2, \dots, p$, é igual a $(1-\alpha)$.

A escolha do valor crítico $C_{R,\alpha}$ depende da matriz de correlação P_{pxp} que descreve a correlação entre todas as variáveis X_i e $X_j, i \neq j$. Na prática, em geral é necessário estimar P_{pxp} através da matriz de correlação amostral R_{pxp} do vetor aleatório X (MINGOTI, 2005). Logo a estrutura de correlação do vetor aleatório X afeta todos os intervalos de confiança simultaneamente e deste modo, o processo é considerado como fora de controle quando:

$$M = \max \left\{ \left| \frac{X_i - \mu_i^0}{\sigma_i} \right|, i = 1, 2, \dots, p \right\} > C_{R,\alpha} \quad (18)$$

Para construir o gráfico de controle plota-se a estatística M para cada observação amostral multivariada e usa-se o valor crítico $C_{R,\alpha}$ como limite superior de controle. O gráfico individual de controle para cada uma das p variáveis é dado por $[\mu_i^0 \pm \sigma_i C_{R,\alpha}]$.

Hayter e Tsui sugerem o uso de simulação para encontrar o valor $C_{R,\alpha}$. Primeiramente é necessário gerar um grande número $N=100000$ de vetores de uma distribuição normal p -variada padronizada, isto é com vetor de médias zero e matriz de covariâncias R_{pxp} (ou P_{pxp} se esta for conhecida), isto é tem-se a amostra $Z^k, k = 1, \dots, N$. Em seguida calcula-se o valor da estatística M para cada um dos vetores amostrais

gerados obtendo-se o valor de $M^k = \max_{1 \leq j \leq p} |Z_j^k|$ para $k=1,2,\dots, N$. Finalmente encontra-se a ordenada correspondente ao $(1-\alpha)$ é-simo percentil da amostra $\{M^1, \dots, M^N\}$ e utiliza-se este valor como uma estimativa para o ponto crítico $C_{R,\alpha}$ (ver também MINGOTI e GLÓRIA, 2005).

A estatística de Hayter e Tsui foi utilizada Por MINGOTI e GLÓRIA (2003) na construção de índices de capacidade multivariados. Nesse artigo, os autores mostram que para a determinação da constante $C_{R,\alpha}$, uma amostra de $N=10000$ observações da distribuição normal p -variada padronizada já é suficiente. No presente artigo será adotado $N=10000$ na simulação para encontrar $C_{R,\alpha}$.

Na fase 1, quando o processo estiver fora de controle as amostras responsáveis pelo sinal devem ser retiradas e o valor de $C_{R,\alpha}$ deve ser recalculado. Na fase 2, quando o processo estiver fora de controle deve-se construir o intervalo de confiança $[\mu_i - \sigma_i C_{R,\alpha}; \mu_i + \sigma_i C_{R,\alpha}]$ para cada uma das p variáveis. Com esses intervalos verifica-se quais observações estão fora dos limites detectando-se automaticamente as variáveis responsáveis pelo sinal de fora de controle do processo.

Hayter e Tsui (1994) mostram que nem o teste proposto é mais poderoso que o de Hotelling e nem este último é mais poderoso que o teste proposto. Os dois competem entre si, sendo que em algumas situações um é preferível em relação a outro em termos do poder do teste.

No artigo original de Hayter e Tsui apenas o caso de observações individuais foi tratado. Neste presente artigo, entretanto, a metodologia foi implementada tanto para observações individuais quanto para dados em subgrupos.

2. METODOLOGIA DE MUDHOLKAR E SRIVASTAVA

De acordo com MUDHOLKAR e SRIVASTAVA (2000) o objetivo é testar hipóteses sobre o vetor de médias $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)'$ em uma população p -variada supondo que distribuição conjunta das variáveis seja simétrica. Deseja-se testar $H_0: \mu = 0$ contra $H_1: \mu \neq 0$. Seja $X_{m \times p}$ uma matriz de m observações independentes e identicamente distribuídas nas p características de uma população simétrica p -variada com matriz de covariâncias positiva definida $\Sigma_{p \times p}$. A matriz $X_{m \times p}$ é dada como em (19). Seja X_j o vetor de m observações na j -ésima característica, $j = 1, 2, \dots, p$, dado da forma $X_j = (X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{mj})'$.

$$X_{m \times p} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1p} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{m1} & X_{m2} & \dots & X_{mp} \end{bmatrix} = [X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_p] \quad (19)$$

Sejam ainda $X_{(j)} = (X_1, X_2, \dots, X_j)$ e $X_{(j)}^* = (\mathbf{1}, X_1, X_2, \dots, X_j)$, onde $\mathbf{1}$ denota um vetor $(m \times 1)$ de elementos unitários. Sob suposição de normalidade p -variada, a distribuição condicional de X_j dado X_1, X_2, \dots, X_{j-1} , é normal com média $\beta_{j0} \mathbf{1} + \beta_{j1} X_1 + \beta_{j2} X_2 + \dots + \beta_{j(j-1)} X_{j-1}$ e matriz de covariâncias $\sigma_{j,12 \dots (j-1)}^2 I_m$, $j = 1, 2, \dots, p$. Em outras

palavras, X_j é a variável resposta e X_1, X_2, \dots, X_{j-1} são as preditoras de um modelo de regressão linear múltipla, como vemos em (20).

$$X_j = X_{(j-1)}^* \beta_{(j)}^* + \varepsilon_j, \quad (20)$$

onde $\beta_{(j)}^* = (\beta_{j0}, \beta_{j1}, \beta_{j2}, \dots, \beta_{j(j-1)})' = (\beta_{j0}, \beta_{(j)})'$ e ε_j são erros independentes e identicamente distribuídos. Pelo método de mínimos quadrados ordinários, temos a estimativa:

$$\hat{\beta}_{(j)}^* = b_{(j)}^* = \left(X_{(j-1)}^{*'} X_{(j-1)}^* \right)^{-1} X_{(j-1)}^{*'} X_j. \quad (21)$$

Agora seja $U_1 = X_1$, e para $j = 2, 3, \dots, p$ seja:

$$U_j = X_j - X_{(j-1)} b_{(j)} = e_j + b_{j0} 1_n = e_j + (\bar{X}_j - \bar{X}_{(j-1)} b_{(j)} 1_n) \quad (22)$$

onde $\bar{X}_{(j-1)} = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_{j-1})'$ e $b_{(j)} = (b_{j1}, b_{j2}, \dots, b_{j(j-1)})'$. O termo e_j é o erro do modelo de regressão ajustado excluindo-se o intercepto b_{j0} , para $j = 1, 2, \dots, p$. Então, tem-se pelo fato de que $(e_j - \bar{e}_j)' \left(X_{(j-1)} - 1_m \bar{X}_{(j-1)} \right)' = 0$, e $b_{j0} 1_m' \left(X_{(j-1)} - 1_m \bar{X}_{(j-1)} \right)' = 0$, a proposição 1 que é análoga a observação de TIKU e SINGH (1982):

$$\sum_{i=1}^m (X_{1i} - \bar{X}_1)(U_i - \bar{U}) = 0. \quad (23)$$

Proposição 1: Como em (22) tem-se:

$$(U_j - \bar{U}_j)' \left(X_{(j-1)} - I_m \bar{X}_{(j-1)} \right)' = 0. \quad (24)$$

Pode ser notado que as m características do vetor U_j não são independentes e identicamente distribuídas. Além disso, sua matriz de covariâncias é quadrada de dimensão $(m - j)$. Para m grande em relação à j , essa dependência pode ser negligenciada e U_j pode ser considerado aproximadamente independente de X_1, X_2, \dots, X_{j-1} .

A combinação robusta das estatísticas para testar $H_0 : \mu = 0$ pode ser construída, aplicando o método do passo modificado de MUDHOLKAR e SUBBAIAH (1980), para as quantidades residuais em (22) como se segue.

Passo 1. Para os dados na matriz $X_{m \times p}$ deve-se construir U_1, U_2, \dots, U_p como definido anteriormente.

Passo 2. Deve-se tratar as componentes de U_1, U_2, \dots, U_p como p amostras aleatórias independentes de p distribuições univariadas simétricas, e construir a estatística t-aparada definida por:

$$\tilde{t}_j = \frac{\tilde{U}_j}{\sqrt{s_{w,j}^2 / (h_j - j + 1) (h_j - j)}}, \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad (25)$$

onde \tilde{U}_j e $s_{w,j}^2$ são respectivamente a média aparada de ordem α_j de U_j , sendo α_j a porcentagem de aparadação de cada extremo do vetor de médias para cada uma das variáveis; e a soma de desvios quadrados Winzorizados obtidos da expressão:

$$s_{w,j}^2 = \left[(g_j + 1) (X_{g+1,j} - \tilde{X}_j)^2 + (X_{g+2,j} - \tilde{X}_j)^2 + \dots + (g_j + 1) (X_{n-g,j} - \tilde{X}_j)^2 \right], \quad (26)$$

onde $h_j = (n - 2g_j)$ é o número “efetivo” de observações, e g_j denota o número de observações aparadas para cada extremo de vetor de observações U_j obtido como em (22). Nota-se que, no j -ésimo estágio, o número “efetivo” de observações é assumido ser $(h_j - j + 1)$.

Passo 3. A partir do passo 2, pode-se obter os p valores de probabilidades de significância independentes, P_j , $j = 1, 2, \dots, p$, do teste usando a aproximação da estatística t -Student reescalada, $\tilde{t}_j = A_j t_{v_j}$ tal que,

$$v_j = 2(n-1)w_j^* \text{ e } A_j = 1 + 0.05 \frac{\alpha_j}{v_j^3} + 87 \frac{\alpha_j^3}{v_j^3}, \quad (27)$$

$$w_j^* \approx 0,5 - 1,62\alpha_j + 1,91\alpha_j^2 - 1,85\alpha_j^3. \quad (28)$$

onde t_{v_j} é a estatística t -Student com v_j graus de liberdade. Os P_j -valores não são invariantes com relação a troca de ordem das variáveis como será visto no exemplo da seção

A combinação dos P_j -valores é uma técnica para avaliação das hipóteses $H_0 : \mu = 0$ contra $H_1 : \mu \neq 0$. Quando a hipótese nula é verdadeira, os P_j -valores dos testes são independentes e uniformemente distribuídos no intervalo $(0,1)$ (Lazar et al., 2002). Alguns dos métodos mais conhecidos e amplamente utilizados para a combinação de estatísticas, como intuito de combinar os P_j -valores independentes P_1, P_2, \dots, P_p , são: (i) $\Psi_T = \min(P_j)$ de acordo com Tippett, (ii) $\Psi_F = -2 \sum_j \log(P_j)$ de acordo com Fisher, (iii) $\Psi_N = \sum \Phi^{-1}(1 - P_j)$ de acordo com Liptak, e (iv) $\Psi_L = A^{-1/2} \sum \log \{ P_j / (1 - P_j) \}$, expressão Logit, onde $A = \pi^2 p(5p + 2) / (15p + 12)$, de acordo com MUDHOLKAR e GEORGE (1979). A hipótese nula é rejeitada para valores pequenos de Ψ_T e Ψ_L e grandes valores de Ψ_F e Ψ_N . Sob a hipótese nula, Ψ_T é distribuído como o mínimo de p variáveis uniformes, Ψ_F tem a distribuição χ^2 com $2p$ graus de liberdade, Ψ_N é distribuído como uma variável normal $(0, p)$, e Ψ_L é aproximado pela distribuição t -Student com $(5p+4)$ graus de liberdade.

Passo 4. Por fim, combinam-se os P_j -valores independentes, $j = 1, 2, \dots, p$, obtidos no passo 3 usando um dos métodos de combinação (Fisher, Logit, Liptak e Tippett) para obter a probabilidade de significância do teste para a hipótese nula, $H_0 : \mu = 0$. Denota-se a estatística obtida por $\tilde{T}_F, \tilde{T}_L, \tilde{T}_N$ e \tilde{T}_T , correspondendo respectivamente aos métodos de combinação de p -valores de Fisher, Logit, Liptak e Tippett.

Os P_j -valores não são invariantes com relação a troca de ordem de entrada das variáveis para implementação do teste como será visto no exemplo da seção 5, embora o p-valor final do teste seja o mesmo para qualquer que seja a ordem de entrada das variáveis para efetuar o teste.

3. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO PROGRAMA MQCI NO S-PLUS

Um programa computacional chamado de *MQCI (Multivariate Quality Control Implementation)*, foi desenvolvido para implementação em *S-Plus*, versão 2000, dos testes T^2 de Hotelling e de Hayter e Tsui para dados em subgrupos e dados individuais. A Figura 1 mostra os procedimentos que o programa utiliza como base de seu algoritmo. De uma forma geral, o programa é de fácil utilização. No ambiente *S-Plus*, após carregar os parâmetros populacionais de cada processo na memória interna do *software*, o programa pode ser chamado no *prompt* de comando através da seguinte instrução:

```
controle(m,dados,i,m,n,p,alfa,fase,valores,dadmedia,dadcov,
        estcralfa,cr)
```

Deve-se colocar nessa ordem: o arquivo de extensão *.sdd* com os dados a serem analisados (*dados*); a coluna de identificação dos subgrupos (*i*), indicando de qual subgrupo provém a observação; o número de subgrupos (*m*); o tamanho dos subgrupos (*n*); o número de variáveis (*p*); o nível de significância para os testes (*alfa*); a indicação de qual fase, 1 ou 2, o usuário deseja que o teste seja feito (*fase*); a indicação se os parâmetros populacionais, vetor de médias e matriz de covariâncias são estimados (*valores=1*, *dadmedia=0*, *dadcov=0*) ou se são fornecidos pelo usuário (*valores=2*), tal que os parâmetros *dadmedia* e *dadcov* recebem o nome dos arquivos de extensão *.sdd*; a indicação se o usuário deseja estimar $C_{R,\alpha}$ com os dados (*estcralfa= 1*, *cr=0*) se desejar usar o valor fornecido pelo usuário, colocar *estcralfa=2* e colocar o valor fornecido (*cr*). Como esta metodologia adota a distribuição normal p -variada como geradora dos dados amostrais, a matriz de covariâncias deverá ser inversível.

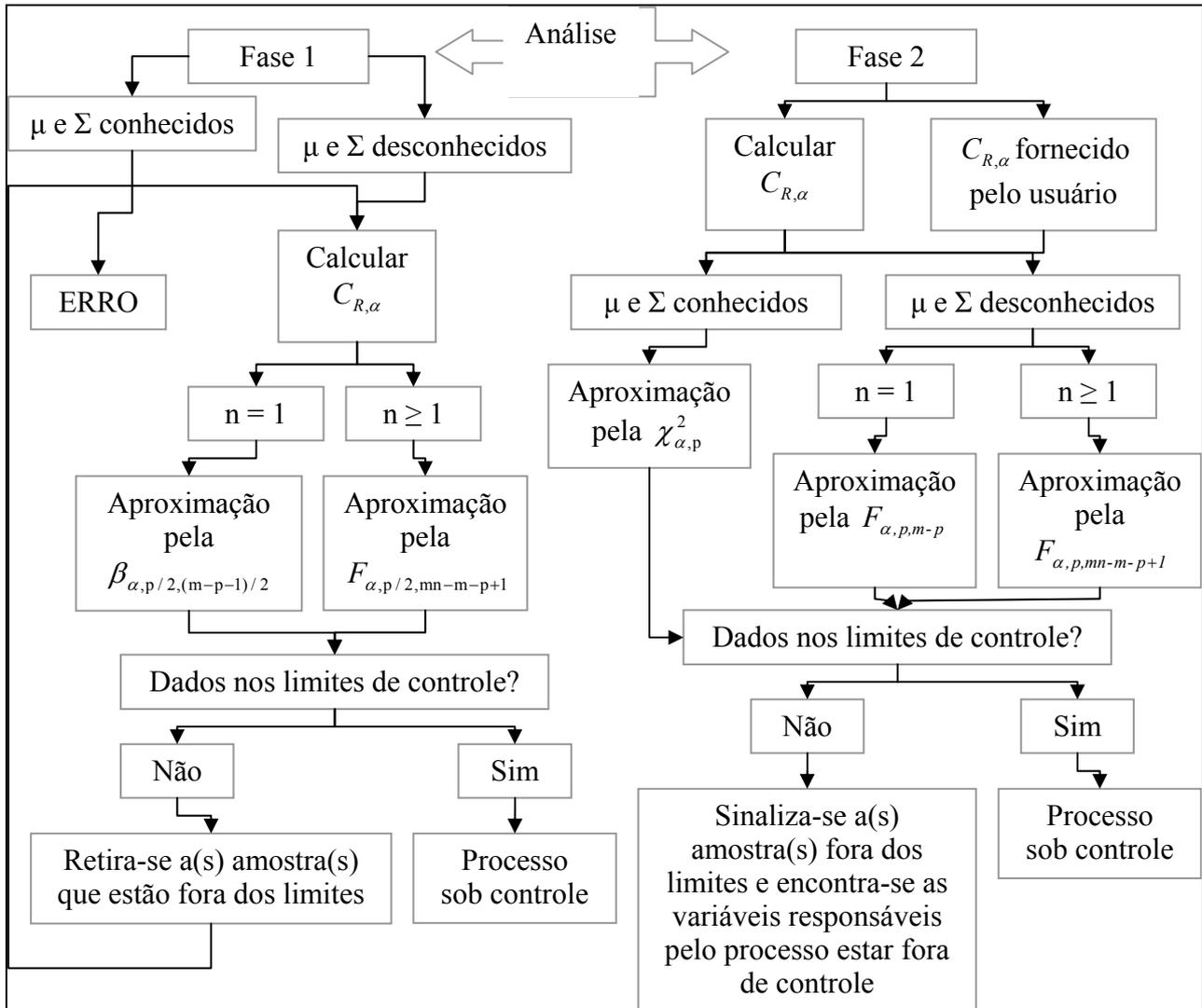


Figura 1 – Fluxograma dos procedimentos realizados pelo programa MQCI.

4. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO PROGRAMA MSRTI NO S-PLUS

A metodologia de MUDHOLKAR e SRIVASTAVA (2000) foi implementada computacionalmente no *S-Plus* no programa para o qual deu-se o nome de *MSRTI* (*Multivariate stepwise robust tests implementation*). A Figura 2 mostra os procedimentos do algoritmo do programa. Após carregar os parâmetros populacionais de cada processo na sua memória interna, o programa pode ser chamado no *prompt* de comando através da seguinte instrução:

```
trobusto_function(dados,m,p,aparacao,valordeg,vetordeg,alfa)
```

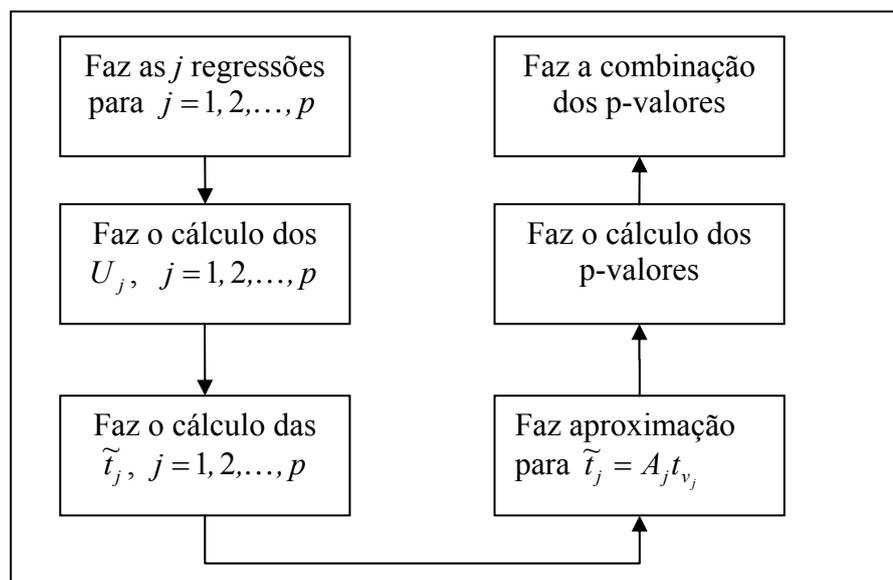


Figura 2

Fluxograma dos procedimentos realizados pelo programa MSRTI.

Deve-se colocar nessa ordem: o arquivo de extensão “.sdd” com os dados a serem analisados, subtraindo-se cada variável do valor da média que se deseja testar sob a hipótese nula (dados), assim o teste fica sendo para a média zero; o número de subgrupos (m); o número de variáveis (p); indicar em “aparacao” o valor 0 (zero) para usar o nível de aparação *default* para todas variáveis que é 5% (colocar valor 0 (zero) em “valordeg” e “vetordeg”); indicar em “aparacao” o valor 1 para usar o nível de aparação indicado em “valordeg” com a mesma porcentagem (entre 0 e 50) de aparação para todas variáveis (colocar valor 0 (zero) em “vetordeg”); indicar em “aparacao” o valor 2 (dois) para usar níveis de aparação diferentes para cada variável indicados no banco de dados com extensão “.sdd” indicados em “vetordeg” de dimensão $p \times 1$ com as porcentagens entre 0 e 50 (colocar valor 0 (zero) em “valordeg”); o nível de significância para a combinação dos p-valores (alfa). Da mesma maneira que no programa da seção 3, a metodologia adota a distribuição normal p-variada, portanto a matriz de covariâncias deverá ser inversível.

5. EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO MQCI E DO MSRTI

Dados históricos de $m=50$ peças de aviões coletados pela Companhia Pratt & Whitney foram apresentados em NIVERTHI e DEY (2000). O banco de dados no ambiente S-Plus é “avião.sdd”. Foram observadas $p=10$ características diferentes de um componente do motor, sendo essas características medidas com grande precisão como mostra a Tabela 2. As variáveis foram nomeadas como: C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7, C8, C9, C10. Deseja-se verificar se o processo de fabricação das peças está sob controle estatístico para monitoramento da produção futura. O vetor de médias e a matriz de covariâncias foram estimados com os dados amostrais, assim como a constante $C_{R,\alpha}$. Dessa forma a chamada para o programa *MQCI* fica:

```
controlelem(aviao,1,50,1,10,0.05,2,1,0,0,1,0,1)
```

e as saídas apresentadas de forma resumida como nas Figuras 3 e 4.

```

O vetor de medias estimado e dado por:
[ ,1]
c1 6.395132
c2 0.597060
c3 8.297904
c4 7.894170
c5 22.049168
c6 1.854400
c7 7.300242
c8 6.393156
c9 3.046770
c10 23.679186

A matriz de correlacao estimada e dada por:
      c1      c2      c3      c4      c5      c6      c7
c1 1.00000000 -0.21586575 0.18407362 0.07751384 -0.04555934 0.32451760 -0.09198251
c2 -0.21586575 1.00000000 0.13655891 0.05977749 0.13881171 -0.27912110 -0.07098154
c3 0.18407362 0.13655891 1.00000000 -0.16938174 -0.01588698 0.20344155 0.06917878
c4 0.07751384 0.05977749 -0.16938174 1.00000000 0.27396963 -0.12655103 0.04407780
c5 -0.04555934 0.13881171 -0.01588698 0.27396963 1.00000000 0.18837771 0.20831200
c6 0.32451760 -0.27912110 0.20344155 -0.12655103 0.18837771 1.00000000 0.08343299
c7 -0.09198251 -0.07098154 0.06917878 0.04407780 0.20831200 0.08343299 1.00000000
c8 0.08504089 0.02714207 0.01273494 -0.05401452 0.01311970 -0.04106469 -0.04471537
c9 -0.24496763 0.02433099 0.07816303 -0.22571321 -0.10574485 -0.04821904 -0.14326897
c10 -0.28503800 0.07815024 -0.18821232 -0.08866766 -0.17536665 -0.30639356 -0.18506165
      c8      c9      c10
c1 0.08504089 -0.24496763 -0.28503800
c2 0.02714207 0.02433099 0.07815024
c3 0.01273494 0.07816303 -0.18821232
c4 -0.05401452 -0.22571321 -0.08866766
c5 0.01311970 -0.10574485 -0.17536665
c6 -0.04106469 -0.04821904 -0.30639356
c7 -0.04471537 -0.14326897 -0.18506165
c8 1.00000000 -0.32495448 -0.12768533
c9 -0.32495448 1.00000000 0.21473953
c10 -0.12768533 0.21473953 1.00000000
*****
Valor de cralfa: [1] 2.792228

*****
Limite superior de controle de T2 de Hotelling: 25.955214339983
As amostras fora dos limites de controle em T2 de Hotelling sao: 20

O numero de amostras problematicas e: 1
*****

Existe pelo menos uma obsevacao de forma padronizada que apresenta limites maiores que o
cralfa.
Matriz com os limites inferior e superior de controle de Hayter e Tsui para todas variaveis:
      [,1]      [,2]
c1 6.3943535 6.3959105
c2 0.5938445 0.6002755
c3 8.2946688 8.3011392
c4 7.8928041 7.8955359
c5 22.0483210 22.0500150
c6 1.8534427 1.8553573
c7 7.2986483 7.3018357
c8 6.3907276 6.3955844
c9 3.0414618 3.0520782
c10 23.6781336 23.6802384

As observacoes fora dos limites de controle em Hayter e Tsui sao:
Variavel, amostra, posicao da observacao na amostra e valor observado
10 1 1 23.6805
8 5 1 6.39
4 11 1 7.8927
4 20 1 7.892
*****

O numero de amostras que apresentaram problemas em T2 de Hotelling e: 1

```

Figura 3 – Resultados do MQCI para o exemplo do avião

```

A matriz dos di's de tal forma que as colunas mostram os di's das amostras problematicas e as
linhas mostram o
s di's das diferentes variveis.
      [,1]
[1,] 0.12663397
[2,] 1.41454995
[3,] 0.05824681
[4,] 17.77294493
[5,] 0.42179647
[6,] 0.05863551
[7,] 1.41759787
[8,] 0.06925157
[9,] 0.03390790
[10,] 3.28455067
Limite de corte para os di's com 0.05 de significancia e: 3.84145882069413

A matriz com os p-valores desses di's e:
      [,1]
[1,] 0.72194790481
[2,] 0.23430254138
[3,] 0.80928869518
[4,] 0.00002488975
[5,] 0.51604199801
[6,] 0.80866571839
[7,] 0.23379918681
[8,] 0.79242962432
[9,] 0.85390285975
[10,] 0.06993476839
*****

```

Figura 4 – Continuação dos resultados do MQCI para o exemplo do avião

Pelas Figuras 3 e 4, observa-se que a amostra 20 foi sinalizada como fora de controle pela metodologia de Hotelling. Portanto é necessário identificar qual(is) variável(is) é(são) responsáveis por esse sinal. Pela Figura 4 tem-se que $\chi^2_{0,95;1} = 3,84$ é o limite superior de controle. Como $d_4 = 17,77$, nota-se que a quarta variável é a responsável pela amostra 20 estar fora de controle.

Usando a metodologia de Hayter e Tsui vemos os resultados apresentados na Figura 4. Observa-se que as variáveis 10, 8 e 4 são as responsáveis pelo processo estar fora de controle. Logo, nota-se que a metodologia proposta por RUNGER et al.(1996b.) não detecta as variáveis 10 e 8 como possíveis responsáveis pelo processo estar fora de controle. A observação 23,6805 da 10^a variável está fora dos limites (23,6781307; 23,6802413) construídos usando a metodologia de Hayter e Tsui. A Figura 4 mostra as outras observações que também estão fora dos limites de controle. Embora, por exemplo, para a 10^a variável o valor observado esteja fora dos limites apenas a partir da quarta casa decimal, é uma diferença importante de ser detectada em vista da grande precisão usada na medição da variável. A Figura 5 mostra os gráficos de controle do MQCI onde se podem observar as variáveis que estão fora de controle estatístico.

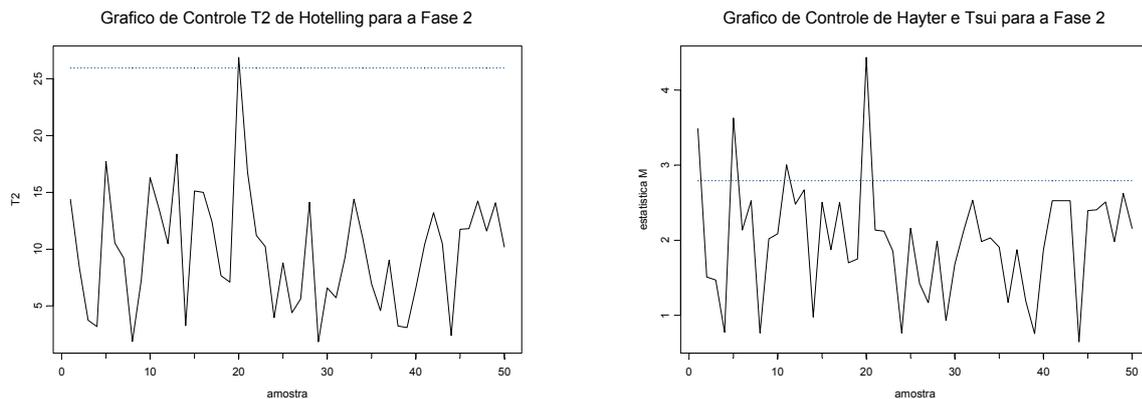


Figura 5 – Gráficos de controle para o exemplo do avião

O artigo de NIVERTHI e DEY (2000) fornece o vetor de médias de especificação dado por: $\mu' = (6,395; 0,597; 8,298; 7,894; 22,049; 1,854; 7,300; 6,393; 3,045; 23,679)$. Sendo assim, para este exemplo testou-se a hipótese nula de que o vetor de médias do processo é igual ao vetor de médias nominal de especificação. Assim, o banco de dados foi reescalado, subtraindo-se todas observações pela média de cada variável. O novo banco de dados foi usado na chamada do *MRSTI*, que é dada por:

```
trobusto(aviao,50,10,0,0,0,5)
```

A porcentagem de aparição é de 5% para cada extremo e o nível de significância do teste é 5%. A saída fornecida pelo programa está na Figura 6. O programa fornece também o vetor de médias e a matriz de covariâncias dos dados padronizados caso seja de interesse do usuário.

```

Estatísticas t aparadas
3.36993 1.072650 -1.12367 3.056521 3.14018 5.567285 2.229101 1.906705 7.587496 4.906707
Pvalores para as 10 variaveis
0.001634294 0.2896251 0.2676101 0.003906108 0.003107739 1.718813e-06 0.03127861 0.06349705
2.287966e-09 1.475610e-05
P-valor de Tippett: 2.287966e-08
De acordo com a combinacao de Tippett, a 5 % de significancia rejeita-se Ho.
P-valor de Fisher: 0
De acordo com a combinacao de Fisher, a 5 % de significancia rejeita-se Ho.
P-valor de Liptak: 0
De acordo com a combinacao de Liptak, a 5 % de significancia rejeita-se Ho.
P-valor de Logit: 8.553171e-18
De acordo com a combinacao Logit, a 5 % de significancia rejeita-se Ho.

```

Figura 6 – Resultados do *MSRTI* para o exemplo do avião com 5% de aparição

Pela Figura 6, observa-se que todos os testes de combinação de p-valores indicam a rejeição da hipótese nula, ou seja, o vetor de médias do processo não está sob controle estatístico. Este teste foi feito usando nenhuma aparição com a finalidade de comparar os resultados. Nota-se pela Figura 7 que os resultados e a conclusão é idêntica à obtida com 5% de aparição.

É importante destacar que o teste de MUDHOLKAR e SRIVASTAVA (2000) não detecta automaticamente as possíveis variáveis causadoras da rejeição da hipótese nula.

```

Estatísticas t aparadas
3.347826 1.069057 -1.347156 1.702992 3.101957 6.184387 2.152502 1.452782 7.678282 5.031932
Pvalores para as 10 variaveis
0.001571775 0.2902822 0.1841272 0.09490566 0.003186522 1.215749e-07 0.03630950 0.1526585
5.948684e-10 6.932906e-06
P-valor de Tippett: 5.948684e-09
De acordo com a combinacao de Tippett, a 5 % de significancia rejeita-se Ho.
P-valor de Fisher: 0
De acordo com a combinacao de Fisher, a 5 % de significancia rejeita-se Ho.
P-valor de Liptak: 0
De acordo com a combinacao de Liptak, a 5 % de significancia rejeita-se Ho.
P-valor de Logit: 5.325637e-18
De acordo com a combinacao Logit, a 5 % de significancia rejeita-se Ho.

```

Figura 7 – Resultados do *MSRTI* para o exemplo do avião sem nenhuma aparição

Outra importante observação é sobre a ordem de entrada das variáveis. Ao modificar a ordem das variáveis para C3, C4, C1, C2, C10, C7, C8, C9, C6, C5, as estatísticas aparadas e os p-valores para 5% e nenhuma aparição em cada extremo, respectivamente são apresentados na Figura 8. Todos os métodos de combinação de p-valores, para 5% e nenhuma aparição, indicaram a rejeição da hipótese nula. Nota-se que, ao trocar a ordem das variáveis, as estatísticas aparadas e os p-valores são diferentes, considerando-se a mesma porcentagens de aparição, porém a decisão final, ao combinar os p-valores é a mesma.

```

Usando 5% de aparição em cada extremo:
Estatísticas t aparadas
-0.4865528 4.078325 3.166761 1.120328 3.890467 3.866044 2.119201 7.162711 6.641023 0.8217818
Pvalores para as 10 variaveis
0.6291345 0.0002006910 0.002888183 0.2690147 0.0003552245 0.0003823254 0.04009984 9.084219e-09
5.015776e-08 0.4158967

Usando nenhuma aparição:
Estatísticas t aparadas
-0.5858818 2.310516 3.062812 1.018806 4.046854 3.896151 1.610227 7.260986 7.434051 0.6878026
Pvalores para as 10 variaveis
0.560644 0.02511102 0.003556681 0.313299 0.0001838631 0.0002964832 0.1137724 2.617520e-09
1.414518e-09 0.4948203

```

Figura 8 – Resultados do *MSRTI* com a ordem das variáveis trocadas

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo apresenta-se a implementação computacional dos testes estatísticos de: T^2 de Hotelling com a decomposição da estatística T^2 para determinação das variáveis causadoras da falta de controle do processo; Hayter & Tsui (1994) e o proposto por MUDHOLKAR e SRIVASTAVA (2000) que é um competidor ao T^2 de Hotelling sendo que as duas últimas técnicas citadas não estavam programadas em nenhum software estatístico. No artigo de MUDHOLKAR e SRIVASTAVA (2000) os autores mostram que o teste proposto (teste *stepwise*) é mais poderoso que o T^2 de Hotelling. Assim, com a disponibilização do programa *MSRTI* poder-se-á avaliar melhor a aplicação desse teste em controle de qualidade. O programa *MQCI* está disponibilizado na internet em www.est.ufmg.br no link de Estatística Industrial e o programa *MSRTI* futuramente estará disponível para *download*.

7. REFERÊNCIAS

ALT, F. B. Multivariate Quality Control. In: **Encyclopedia of Statistical Sciences**, vol. 6, editado por N.L. Johnson e S. Kotz, Wiley, New York, 1985.

HAYTER, A. J.; TSUI, K. L. Identification and Quantification in Multivariate Quality Control Problems. In: **Journal of Quality Technology**, Atlanta, v. 26, n. 3, p. 197-208, 1994.

HOTELLING, H. Multivariate quality control. In: **Techniques of Statistical Analysis**, editado por Eisenhart, Hastay, e Wallis, MacGraw-Hill, New York, 1947.

JACKSON, J. E. **A user's guide to principal components**. New York: John Wiley, 1991.

JOHNSON, R. A.; WICHERN, W. D. **Applied Multivariate Statistical Analysis**. 4ª ed. New Jersey: Prentice Hall, 2002.

MASON, R. L.; CHOU, Y.M.; YOUNG, J. C. Applying Hotelling's T^2 statistic to batch processes. In: **Journal of Quality Technology**, 33, 4, 466-479, 2001.

MASON, R. L.; TRACY, N.D.; YOUNG, J. C. A practical approach for interpreting multivariate T^2 chart signals. In: **Journal of Quality Technology**, 29, 99-108, 1997.

MINGOTI, S.A. **Análise de dados através de métodos de estatística multivariada: uma abordagem aplicada**. 1ª ed. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2005.

MINGOTI, S.A., GLÓRIA, F.A.A. Comparando os métodos paramétrico e não-paramétrico na determinação do valor crítico do teste de médias proposto por Hayter e Tsui. **Produção**, 15,251-263, 2005.

MINGOTI, S. A., GLÓRIA, F. A. A. Uma proposta de modificação do índice de capacidade multivariado de Chen. In: XXIII ENEGEP, 2003, Ouro Preto. **Anais...Minas Gerais** (em cd-rom).

MINGOTI, S. A. Pareto charts and principal components analysis combined. In: **Revista Produto & Produção**, v. 5, n. 1, p. 21-29, 2001.

MONTGOMERY, D. C. **Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade**. 4ª ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2004.

MUDHOLKAR, G. S.; GEORGE, E. O. The logit statistic for combining probabilities – an overview. In: **Optimizing Methods in Statistics**, p. 345-356, New York: John Wiley, 1979.

MUDHOLKAR, G. S.; SRIVASTAVA, D. K. A class of robust stepwise alternatives to Hotelling's T^2 tests. In: **Journal of Applied Statistics**, New York, v. 27, n. 5, p. 599-619, 2000.

MUDHOLKAR, G.S.; SRIVASTAVA, D. K. Robust analogs of Hotelling two sample T^2 . In: **Communications in Statistics-Theory and Methods**, 1999.

MUDHOLKAR, G. S.; SUBBAIAH, P. Testing a significance of a mean vector- a possible alternative do Hotelling's T^2 . In: **Annals of the Institute of Statistical Mathematics**, 32, Part A, p. 43-52, 1980.

NIVERTI, M.; DEY, D. K. Multivariate Process Capability a Bayesian Perspective. In: **Communications in Statistics-Theory and Methods**, 2000.

- NOMIKOS, P.; MACGREGOR, J. F. Multivariate SPC charts for monitoring batch processes. In: **Technometrics**, v. 37, p. 41-59, 1995.
- REIS, E. A. **Noções Básicas de S-Plus for Windows**, Relatório Técnico, Departamento de Estatística, UFMG, Belo Horizonte, 1997.
- RUNGER, G. C.; ALT, F. B.; MONTGOMERY, D. C. Controlling Multiple Stream Processes with Principal Components. In: **Communications in Statistics-Theory and Methods**, 1996a.
- RUNGER, G. C.; ALT, F. B.; MONTGOMERY, D. C. Contributors to a Multivariate Statistical Process Control Signal. In: **Communications in Statistics-Theory and Methods**, 1996b.
- SULLIVAN, J. H.; WOODALL, W. H. A Comparison of Multivariate Quality Control Charts for Individual Observations. In: **Journal of Quality Technology**, v. 27, 1995.
- TIKU, M. L.; BALAKRISHNAN, N. Robust Hotelling-type T^2 statistics based on modified maximum likelihood estimators. In: **Communications in Statistics-Theory and Methods**, v. 17, n. 6, p. 1789-1810, 1988.
- TIKU, M. L.; SINGH, M. Robust statistics for testing mean vectors of multivariate distributions. In: **Communications in Statistics-Theory and Methods**, v. 11, n. 9, p. 227-234, 1982.
- TRACY, N. D.; MASON, R. L.; YOUNG, J. C. Multivariate Control Charts for Individual Observations. In: **Journal of Quality Technology**, v. 24, 1992.
- VENABLES, W. N.; RIPLEY, B. D. **Modern Applied Statistics with S**, 4^a ed. New York, 2003.

S-Plus computational implementation of multivariate statistical tests with applications in quality control

Fernanda Karine Ruiz Colenghi¹, fernanda.colenghi@gmail.com

Sueli Aparecida Mingoti², sueliam@est.ufmg.br

¹ Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Mestrado em Estatística
Belo Horizonte, MG, Brasil

² Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Professora do corpo docente da Graduação e Pós-Graduação em Estatística, MG, Brasil

*Received: November, 2007 / Accepted: December, 2007

ABSTRACT

Due to the high demands of a competitive market, the companies need to obtain quality control certificates of the production process or services. In this context, the multivariate quality control appears as a tool extremely important to evaluate many characteristics which affect directly and simultaneously the final quality of the product. Due to these factors, it is important to study multivariate statistical tools for process control. In this paper, we present some multivariate statistical tests, such as Hotelling's T^2 (1947); HAYTER & TSUI (1994) and MUDHOLKAR & SRIVASTAVA (2000). Moreover, we present an example with the computational implementation of these methods using the programming language of the statistical software S-Plus (VENABLES e RIPLEY, 2003 e REIS, 1997).

Keywords: Multivariate processes control. Statistical stepwise tests. Trimmed means.
