Revista Eletrônica Sistemas & Gestão 3 (1) 55-73
Programa de Pós-graduação em Sistemas de Gestão, TEP/TCE/CTC/PROPP/UFF

Uma comparação de gráficos de controle para a média de processos autocorrelacionados

Sueli A. Mingoti[1], sueliam@est.ufmg.br

Fabiane R. S. Yassukawa[2], fabianesy@yahoo.com.br

[1] Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Professora Associada do corpo docente da Graduação e Pós-Graduação em Estatística

Belo Horizonte, MG, Brasil

[2] Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Bacharela em Estatística, Belo Horizonte, MG, Brasil

*Recebido: Abril, 2008 / Aceito: Abril, 2008

RESUMO

Gráficos de controle são amplamente utilizados com o objetivo de monitorar parâmetros do processo. Em geral esses gráficos são fundamentados nas suposições de normalidade e independência entre as unidades amostrais. No entanto, em muitos casos como em processos químicos ou no monitoramento on-line, a suposição de independência não se verifica. Neste artigo comparamos os gráficos de controle construídos via metodologias de geoestatística e de séries temporais com os gráficos de controle muito conhecidos na literatura como Shewhart, CUSUM, EWMA, quando usados para monitoramento da média de processos autocorrelacionados. A comparação foi feita via simulação de Monte Carlo realizada com o uso do software estatístico R para Windows.

Palavras-chave: Gráficos de Controle. Processos Autocorrelacionados. Geoestatística. Monte Carlo. Séries Temporais.

1. INTRODUÇÃO

Com a rápida evolução da tecnologia e o acirramento da competitividade entre empresas de mercados concorrentes, o uso de recursos estatísticos para monitoramento de processos de produção torna-se cada vez mais necessário. Basicamente, as dimensões de um processo ótimo são: economia, eficiência, produtividade e qualidade. Para que um processo possa contemplar todas essas dimensões é necessário o seu monitoramento contínuo além de melhorias ou políticas com o objetivo de diminuir a sua variabilidade. Processos cujas características de qualidade tenham suas distribuições de valores centralizadas nos valores alvos (parâmetros) pré-estabelecidos e com pequena variabilidade em torno desse valor, produzem um número menor de itens fora das especificações, proporcionando globalmente menores custos com retrabalho e com perdas gerais na produção ou de credibilidade. Gráficos de controle como o de Shewhart (1932) são amplamente utilizados para monitoração de parâmetros de processos e são fundamentados nas suposições de normalidade da característica de qualidade que está sendo avaliada e na independência entre as unidades amostrais. No entanto, nem sempre estas suposições são válidas, daí a necessidade de se buscar novas metodologias que englobem uma classe maior de situações práticas. Em processos químicos ou em monitoramento on-line a presença de correlação entre as unidades amostrais (chamada de autocorrelação) é muito comum. Como a autocorrelação afeta as estimativas de variabilidade do processo, o uso de gráficos de controle construídos sob a suposição de independência não são adequados para o monitoramento de processos deste tipo podendo levar a conclusões equivocadas sobre o desempenho dos mesmos (Alwan e Roberts,1995). Muitos artigos tem sido publicados na literatura com o objetivo de avaliar os efeitos da autocorrelação nos gráficos de controle existentes e propor correções de modo a torná-los mais eficazes nessas situações (ver por exemplo, Apley e Shi, 1999; Atienza et al., 2002; Claro et al. 2007). Gráficos como o CUSUM (Page, 1954; Costa et al., 2005) e o EWMA (Roberts 1959; Montgomery, 2004) aparecem como algumas alternativas nestas situações. Outras propostas baseiam-se no tratamento das observações amostrais sequenciais do processo como uma série temporal sendo possível então o uso de modelos da classe ARIMA para modelagem da série e construção do gráfico de controle correspondente ou da metodologia de Geoestatística para obter estimativas do desvio-padrão do processo que são incorporadas nos gráficos de controle de Shewhart (Mingoti e Fidelis, 2001). Neste caso, a autocorrelação estaria automaticamente incorporada nos limites de controle via a nova forma de estimação de desvio-padrão do processo sem a necessidade de identificação e ajuste de modelos de séries temporais. Outros procedimentos envolvem a transformação do controle univariado para multivariado (Apley e Tsung, 2002; Alwan e Alwan, 1994) através da separação da seqüência de n observações do processo em grupos de tamanhos g, intersecccionados ou não, e construídos preservando-se a ordem das observações na seqüência. Assim o problema pode ser visto como um caso g-variado com uma amostra de tamanho $\frac{n}{2}$ se n for par e os grupos não tiverem intersecção Testes estatísticos como o T^2 de Hotelling (Mason e Young, 2002) podem então ser usados para o monitoramento da média do processo univariado e a autocorrelação é incorporada no gráfico de controle(ver também Rocon, 2004). Uma alternativa mais simples é a escolha do intervalo ótimo de amostragem que elimine a correlação entre amostras, entretanto o intervalo de amostragem para tal fim pode vir a ser muito grande permitindo assim que muitos itens não conformes sejam produzidos (Amorim e Costa,1994).

Em Mingoti e Neves (2005) mostrou-se que os estimadores construidos via metodologia de geoestatística são melhores que a variância amostral S^2 e que os estimadores baseados na amplitude amostral, para representar a variabilidade natural dos processos autocorrelacionados. No entanto, o desempenho dos gráficos de Shewhart para a média do processo usando as estimativas de geoestatística não foi testada por esses autores e nem mesmo em Mingoti e Fidelis (2001) no qual a proposta foi inicialmente apresentada. Sendo assim, este artigo tem como objetivo apresentar os resultados obtidos de um estudo comparativo das cartas de controle de Shewhart construídas através da metodologia de geoestatística com as obtidas via séries temporais e com as cartas usuais como *CUSUM* e *EWMA* quando aplicadas a processos autocorrelacionados.

Para facilitar o entendimento do leitor os gráficos de controle tratados neste artigo serão apresentados brevemente nas seções 2 e 3 sendo os resultados do estudo apresentados na seção 4.

2. GRÁFICOS DE CONTROLE PARA MÉDIA DE PROCESSOS

Nas seções 2.1 a 2.3 são introduzidos os gráficos de controle para a média do processo construidos supondo-se que as observações amostrais são independentes em relação a característica de qualidade *X* que está sendo monitorada e que a sua distribuição de probabilidades é normal.

2.1. O GRÁFICO DE CONTROLE DE SHEWHART

Dentre os gráficos usados para monitoramento de parâmetros do processo encontra-se o gráfico de controle proposto por Dr. Walter S. Shewhart (1932) que é o primeiro proposto na literatura e sem dúvida o mais conhecido. Basicamente, ele é uma representação gráfica do comportamento da característica de qualidade *X* medida em uma ou em várias amostras aleatórias do processo, em relação à ordem de coleta das mesmas. Este gráfico delimita uma região na qual os valores da característica da qualidade *X*, ou de estimativas de parâmetros de sua distribuição de probabilidades como a média ou o desvio padrão amostrais, devem permanecer enquanto o processo estiver sob a condição de "controle estatístico". O gráfico usual para controle da média do processo, por exemplo, contém uma linha central (LC) que representa o valor médio da característica da qualidade e duas outras linhas horizontais chamadas respectivamente de limite superior de controle (LSC) e limite inferior de controle (LIC), determinadas utilizando-se a distribuição de probabilidades da característica de qualidade em questão. O gráfico de controle equivale a um teste de hipótese em que pontos amostrais (ou funções destes) entre os limites de controle equivalem a não rejeitar a hipótese de que o processo está sob controle estatístico enquanto que pontos fora desses limites equivalem a rejeitar esta hipótese (Montgomery, 2004). Os limites de controle calculados para o monitoramento da média do processo no caso em que a distribuição da característica de qualidade é normal, são dados por:

$$\text{LSC} = \mu + k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad ; \qquad \text{LC} = \mu \quad ; \qquad \text{LIC} = \mu - k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

onde μ e σ são respectivamente a média e o desvio padrão da distribuição de *X* e *k* é a distância dos limites de controle em relação à linha central expressa em unidades de desvio padrão. Um valor comum é *k* = 3 e neste caso a porcentagem de ocorrência de "alarmes falsos" (ou seja, o surgimento de pontos amostrais fora dos limites de controle quando o processo está sob controle estatístico) é delimitada em 0,27%. Assim, o valor esperado de *ARL* sob controle é aproximandamente 370. Define-se como *ARL* o número esperado de amostras até que seja observado o primeiro ponto amostral fora dos limites de controle. Quando este evento ocorre e o processo está sob controle tem-se o *ARL* sob controle e quando o evento ocorre quando o processo está fora de controle estatístico tem-se o *ARL* fora de controle. Alguns autores preferem usar o termo *NMA* (Número Médio de Amostras até um sinal) no lugar de *ARL* (*Average Run Lenght*).

Estudos mostram que o gráfico de controle de Shewhart é mais apropriado para detectar a ocorrência de grandes desvios da média do processo sendo pouco poderoso para detecção de pequenas mudanças (ver Costa *et. al*., 2005) além de ser fundamentado na suposição de independência entre as unidades amostrais no que se refere a variável *X* em questão.

2.2. O GRÁFICO DE CONTROLE *CUSUM*

Um gráfico indicado para detectar pequenas mudanças na média do processo é o *CUSUM* (*Cumulative Sum*) que é fundamentado em somas cumulativas das estimativas do parâmetro de interesse. Este gráfico é construído acumulando-se os desvios dos valores amostrais de *X* (ou de médias amostrais de *X*) em relação a média teórica do processo μ.

Os desvios positivos (que estão acima do alvo) são acumulados na estatística c^+, e os desvios negativos (que estão abaixo do alvo) na estatística c^-, chamadas *CUSUM*s unilaterais superior e inferior, respectivamente e calculadas da seguinte forma:

$$c_i^+ = max[0, x_i - (\mu_0 + K) + c_{i-1}^+]$$

$$c_i^- = max[0, (\mu_0 - K) - x_i + c_{i-1}^-] \qquad (1)$$

onde *K* é o valor de tolerância ou folga e μ_0 é o valor médio alvo do processo.

Se c^+ ou c^- excederem um limite pré-especificado *H*, o processo é considerado como fora de controle. O gráfico *CUSUM* é planejado através da escolha dos valores de *K* e *H*. Em geral, recomenda-se que esses parâmetros sejam escolhidos de modo a fornecer um bom desempenho considerando-se o poder do gráfico ou o valor *ARL*. Sejam $H = h\sigma$ e $K = k\sigma$, onde σ é o desvio padrão da variável aleatória *X* usada na formação do *CUSUM*. O Quadro 1, contém alguns valores de *k* e os correspondentes valores de ***h***, sugeridos por Hawkins e Olwell (1993), para um valor de *ARL* igual a 370 no caso de processos com observações amostrais independentes. Estudos mostram que o *CUSUM* é mais poderoso que o gráfico de controle de Shewhart para detecção de pequenos desvios na média do processo e é equivalente a este no caso de grandes mudanças (Costa *et al*., 2005).

Quadro 1: Valores de k* e h para o gráfico CUSUM

k	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5
h	8,01	4,77	3,34	2,52	1,99	1,61

(*) de acordo com Hawkins e Olwell (1993)

2.3. O GRÁFICO DE CONTROLE *EWMA*

O gráfico da média móvel exponencialmente ponderada, *EWMA (Exponentially Weighted Moving Average)*, introduzido por Roberts (1959) também é indicado para detecção de pequenas mudanças na média do processo. Defina a estatística $Z_i = \lambda X_i + (1-\lambda) Z_{i-1}$, onde $0 < \lambda \leq 1$. O gráfico de controle *EWMA* consiste na plotagem de Z_i versus o número da amostra *i* (ou tempo). A linha central e os limites de controle para o gráfico de controle *EWMA*, construidos sob a suposição de normalidade, são dados por:

$$\begin{cases} LSC = \mu_0 + L\sigma\sqrt{\dfrac{\lambda}{(2-\lambda)}\left[1-(1-\lambda)^{2i}\right]} \\ LC = \mu_0 \\ LIC = \mu_0 - L\sigma\sqrt{\dfrac{\lambda}{(2-\lambda)}\left[1-(1-\lambda)^{2i}\right]} \end{cases} \tag{2}$$

Para grandes valores de *i* em (2) os limites superior e inferior de controle assintóticos do gráfico tornam-se respectivamente iguais a:

$$LSC = \mu_0 + L\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}} \;\; ; \;\; LIC = \mu_0 - L\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}}$$

Os parâmetros de planejamento do gráfico *EWMA* são os valores de *L* e λ. É possível escolher valores para esses parâmetros de modo a atingir-se um desempenho pré-estabelecido em termos de *ARL*, ou de modo que o desempenho do gráfico de controle *EWMA* seja próximo ao do *CUSUM* para detectar pequenas mudanças na média do processo. Valores baixos de λ fazem com que o gráfico detecte mais rapidamente pequenas mudanças na média do processo. Alguns dos valores de λ, freqüentemente escolhidos para o planejamento do gráfico são 0,1 e 0,2 (Montgomery, 2004). A escolha da constante λ é discutida por vários autores entre eles Lucas e Saccucci (1990), Box e Luceno (1997) e Epprecht *et. al*. (1998).

Dependendo do valor escolhido para λ é possível mostrar que o gráfico *EWMA* é mais poderoso que o de Shewhart para detecção de pequenas mudanças na média do processo além de ser robusto em relação a não-normalidade da distribuição da característica de qualidade *X* (ver Costa *e. al*. 2005 e Montgomery, 2004). O Gráfico *EWMA* tem sido também recomendado para o monitoramento de processos autocorrelacionados (Mastrangelo e Montgomery, 1991; Hunter, 1986).

3. PROCESSOS AUTOCORRELACIONADOS

Muitos processos não contemplam a suposição de independência entre as unidades amostrais, como, por exemplo, os processos químicos ou aqueles que são amostrados *on-line*. Quando não se considera a correlação entre as unidades amostrais quando essa existe a eficiência dos gráficos de controle apresentados na seção 2 é diretamente afetada, podendo fornecer conclusões inapropriadas uma vez que a taxa de alarmes falsos e o poder dos gráficos são afetados (Mingoti e Fidelis,2001; Claro, *et al*, 2007; Alwan e Roberts, 1995). Como exemplo, seja S^2 o desvio padrão amostral comumente usado para estimar a variância real σ^2 do processo no caso de observações individuais. Pode ser mostrado (Zhang, 1998) que a esperança matemática de S^2 é dada como em (3), isto é:

$$E\left[S^2\right] = \sigma^2\left[1 - \frac{2}{n(n-1)}\sum_{h=1}^{n-1}(n-h)\rho(h)\right] \quad (3)$$

onde, $\rho(h) = \rho_h = corr(X_i, X_{i+h})$, denota a autocorrelação de ordem *h* do processo. Assim, para processos autocorrelacionados o estimador S^2 será sempre viciado para a variância do processo a menos que o tamanho amostral *n* seja grande. Logo, é necessário modificar-se os gráficos de controle usuais para tratar a situação de autocorrelação. Algumas alternativas serão apresentadas nas seções a seguir.

3.1. O GRÁFICO DE CONTROLE VIA RESÍDUOS DO AJUSTE DE MODELOS DE SÉRIES TEMPORAIS

Uma das propostas quando se tem autocorrelação entre as unidades amostrais é tratar a série de observações sequenciais do processo como uma série temporal. A partir daí, busca-se o melhor modelo estatístico na classe ARIMA (Morettin e Toloi, 2004) para descrever o comportamento da série de observações do processo. Uma vez ajustado o modelo, os seus resíduos são utilizados para monitorar a média do processo já que uma mudança na média da característica da qualidade *X* se reflete diretamente nos resíduos do modelo ARIMA (Box e Luceno, 1997). Considerando-se que por suposição os resíduos devem ser independentes, identicamente distribuídos e com distribuição normal, os gráficos de controle para a média de Shewhart são aplicáveis aos resíduos Em termos práticos essa alternativa pode gerar problemas para o usuário por exigir uma série longa de observações para que se possa ter uma boa identificação do modelo ARIMA que representa o comportamento do processo.

Uma outra alternativa é o monitoramento via estatística *EWMA* descrita na seção 2.3 já que pode ser mostrado que o modelo *EWMA* equivale ao ajuste do modelo de séries temporais ARIMA (0,1,1), sendo $\lambda = 1-\theta, 0<\theta<1$. Como a estatística *EWMA* é uma média ponderada de todas as observações passadas e a atual, o gráfico de controle levaria em consideração a autocorrelação entre as observações amostrais do processo (Montgomery, 2004).

3.2. O GRÁFICO DE CONTROLE VIA METODOLOGIA DE GEOESTATÍSTICA

Uma solução proposta por Mingoti e Fidelis (2001) é estimar a variabilidade do processo autocorrelacionado através do uso dos estimadores de variância propostos por

Mingoti e Neves (2005) e que são construídos via metodologia de geoestatística (Houlding, 2000). Deste modo, o monitoramento da média do processo é feito através do gráfico usual de Shewhart aplicado à variável original de interesse, *X*, considerando a estimativa de geoestatística para o desvio padrão do processo ao invés do desvio-padrão amostral *S* ou da estimativa via amplitude amostral. Com esta correção, a autocorrelação está automaticamnte incorporada nos limites de controle *LSC* e *LIC* definidos como em (4):

$$LSC = \mu + k\frac{\hat{\sigma}_g}{\sqrt{n}} \quad ; \qquad LC = \mu \quad ; \qquad LIC = \mu - k\frac{\hat{\sigma}_g}{\sqrt{n}} \tag{4}$$

em que $\hat{\sigma}_g$ denota a estimativa de geoestatística do desvio padrão do processo. Essa estimativa é função do semi-variograma e da autocorrelação amostrais de ordem *h*. Dado uma amostra de tamanho *n*, $X_1, X_2, ..., X_n$, define-se o semi-variograma amostral de Matheron (1963) no lag *h* como em (5):

$$\hat{\gamma}_h = \hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2}\,\frac{\sum_{i=1}^{n-h}\left(X_i - X_{i+h}\right)^2}{n-h}\ , \ h \in T \tag{5}$$

onde X_i é a característica de qualidade medida no *i-ésimo* item amostrado, *i = 1 2 ..., n*, $T = \{1,2,...,n-1\}$, $(n-h)$ é o número de pares (X_i, X_j) que estão a uma distância de *h* unidades no período de amostragem. Quando *h=1* e as observações são independentes o estimador em (5) é conhecido como estimador de diferenças sucessivas para σ^2, e neste caso, é não viciado para estimar esse parâmetro de variabilidade.

Considerando-se uma série temporal estacionária, a autocorrelação amostral de ordem h, denotada por $\hat{\rho}_h$, é definida por:

$$\hat{\rho}_h = \hat{\rho}(h) = \frac{\sum_{i=1}^{n-h}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(X_{i+h} - \overline{X}\right)}{n-h}\ , \ h \in T \tag{6}$$

sendo $\overline{X}$ a média amostral das *n* observações.

Alguns estimadores propostos por Mingoti e Neves (2005) para σ^2, e que serão abordados neste artigo, encontram-se no Quadro 2 com a respectiva notação a ser utilizada na apresentação dos resultados. Todos esses estimadores levam em consideração a correlação entre as unidades amostrais do processo. O estimador denotado por v1 é função da autocorrelação de ordem 1 sendo apropriado para situações nas quais essa é a correlação mais relevante entre as unidades do processo. Os estimadores v2, v4 e v5 são opções para as situações nas quais as correlações de ordem maior que 1 também são significativas. O estimador v3 é uma média dos semi-variogramas amostrais de ordem 1 até *M*, sendo *M* uma constante que pertence ao conjunto $T = \{1,2,...,n-1\}$ e que é escolhida pelo usuário. Um valor muito comum usado em Geoestatística para *M* é $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, ou seja o maior inteiro menor ou igual a $\frac{n}{2}$ (Journel e Huijbregts, 1978, pag. 194). Em Mingoti e Neves (2005) é mostrado que os estimadores de geoestatística apresentam bom desempenho para estimação de σ^2 no caso de processos autocorrelacionados embora sejam viciados. A escolha entre eles depende do grau de autocorrelação existente no processo.

Quadro 2: Estimadores da variância via Geoestatística

V1	v2	v3	v4	v5
$\hat{\sigma}^2_{g1}=\frac{\hat{\gamma}_1}{1-\hat{\rho}_1}$	$\hat{\sigma}^2_{g2}=\frac{\sum_{h=1}^{3}\frac{\hat{\gamma}_h}{3}}{1-\sum_{h=1}^{3}\frac{\hat{\rho}_h}{3}}$	$\hat{\sigma}^2_{g3}=\frac{\sum_{h=1}^{M}\hat{\gamma}_h}{M}$	$\hat{\sigma}^2_{g4}=\frac{\sum_{h=1}^{M}\hat{\gamma}_h}{\sum_{h=1}^{M}(1-\hat{\rho}_h)}$	$\hat{\sigma}^2_{g5}=\frac{1}{M}\sum_{h=1}^{M}\frac{\hat{\gamma}_h}{(1-\hat{\rho}_h)}$

(*) fonte: Mingoti e Neves (2005).

A título de ilustração apresentamos um exemplo numérico da construção da carta de controle de Shewhart utilizando-se o estimadores de geostatística v1, v2 e v3 para *M*=10. O Quadro 3 apresenta os dados de 21 amostras de viscosidade (X_i) coletadas de hora em hora. Os valores do semi-variograma $(\hat{\gamma}(h), h=1,2,...,10)$ necessários para o cálculo dos três estimadores bem como as autocorrelações de ordem h=1,2,...,10 $(\hat{\rho}(h))$ são dados nas 2 últimas colunas. A título de ilustração no quadro são mostradas as diferenças sucessivas de ordem 1, 2 e 3 bem com a soma de quadrados dos elementos dessas colunas. Através da soma de quadrados calcula-se os semi-variogramas de ordem a, 1, 2 e 3, como segue:

$$\hat{\gamma}_1=\hat{\gamma}(1)=\frac{1,37}{2(20)}=0,0343\ ;\ \hat{\gamma}_2=\hat{\gamma}(2)=\frac{2,27}{2(19)}=0,0597\ ;\ \hat{\gamma}_3=\hat{\gamma}(3)=\frac{3,66}{2(18)}=0,1017$$

Os valores do semi-variograma amostral de Matheron para *h*=1,2 e 3 bem como as autocorrelações estimadas de ordem 1 a 3 são mostradas nas últimas duas linhas do quadro. Os estimadores v1 e v2 são calculados respectivamente da seguinte forma:

$$\text{v1}=\quad \hat{\sigma}^2_{g1}=\frac{\hat{\gamma}_1}{1-\hat{\rho}_1}=\frac{0,0343}{1-0,7744}=0,1521$$

$$\text{v2}=\hat{\sigma}^2_{g2}=\frac{\sum_{h=1}^{3}\frac{\hat{\gamma}_h}{3}}{1-\sum_{h=1}^{3}\frac{\hat{\rho}_h}{3}}=\frac{\frac{1}{3}\left[0,0343+0,0597+0,1017\right]}{1-\left[\frac{1}{3}\left(0,7744+0,6193+0,4009\right)\right]}=\frac{0,0652}{0,4018}=0,1622$$

$$\text{v3}=\sigma^2_{g3}=\frac{1}{10}\sum_{h=1}^{10}\hat{\gamma}_h=\frac{1}{10}\left[0,0343+0,0597+...+0,3658+0,41\right]=0,2163$$

Para esses dados o valor de S^2 é igual a 0,2642 um valor maior que as estimativas de geoestatística. A média amostral é igual a 9,052. O Quadro 4 apresenta os limites de controle de Shewhart a 99,73% para a média do processo construídos usando os 4 estimadores. Observa-se que o comprimento dos intervalos construídos via estimadores de geoestatística têm menor amplitude que o intervalo construído via desvio padrão amostral.

Quadro 3: Dados de viscosidade – exemplo de estimação via Geoestatística

Amostra(i)	X_i	$X_i - X_{i-1}$	$X_i - X_{i-2}$	$X_i - X_{i-3}$	$\hat{\gamma}(h)$	$\hat{\rho}(h)$
1	9,6	*	*	*	0,0343	0,7744
2	8,9	-0,700001	*	*	0,0597	0,6193
3	8,9	0,000000	-0,700001	*	0,1017	0,4009
4	8,8	-0,099999	-0,099999	-0,80000	0,1529	0,1646
5	8,7	-0,100000	-0,200000	-0,20000	0,1884	0,0724
6	8,7	0,000000	-0,100000	-0,20000	0,2473	-0,0727
7	8,5	-0,200000	-0,200000	-0,30000	0,2821	-0,1491
8	8,5	0,000000	-0,200000	-0,20000	0,3208	-0,2217
9	8,5	0,000000	0,000000	-0,20000	0,3658	-0,2943
10	8,7	0,200000	0,200000	0,20000	0,4100	-0,3404
11	8,7	0,000000	0,200000	0,20000		
12	8,7	0,000000	0,000000	0,20000		
13	8,9	0,200000	0,200000	0,20000		
14	8,9	0,000000	0,200000	0,20000		
15	8,9	0,000000	0,000000	0,20000		
16	9,2	0,300000	0,300000	0,30000		
17	9,2	0,000000	0,300000	0,30000		
18	10,0	0,800000	0,800000	1,10000		
19	10,0	0,000000	0,800000	0,80000		
20	9,9	-0,100000	-0,100000	0,70000		
21	9,9	0,000000	-0,100000	-0,10000		
Soma de quadrados	*SSQ*	0,034300	0,059700	0,10170		

Quadro 4: Limites de controle de Shewhart – Exemplo de viscosidade

Estimativa de variância	Estimativa de desvio- padrão	Limite superior de controle	Limite inferior de controle
S^2 =0,2642	0,514	8,716	9,388
v1=0,1521	0,390	8,797	9,307
v2=0,1622	0,403	8,788	9,316
v3=0,2163	0,465	8,885	9,219

4. MODELOS SIMULADOS

Com o objetivo de avaliar o desempenho das cartas de controle apresentadas nas seções 2 e 3, com respeito ao *ARL* em controle e fora de controle, foram geradas várias séries de observações autocorrelacionadas provenientes dos modelos ARMA estacionários e invertíveis (Morettin e Toloi, 2004*).* Os limites de controle foram estimados a partir de séries de tamanho n=50 e n=100 geradas de acordo com os modelos AR(1) e ARMA(1,1), definidos como:

$$AR(1): X_t = \delta + \phi X_{t-1} + a_t$$

$$ARMA(1,1): X_t = \delta + \phi X_{t-1} - \theta a_{t-1} + a_t$$

onde ϕ e θ são os pesos associados aos valores de X_{t-1} e a_{t-1}, δ é uma constante e a_t é o erro aleatório com distribuição normal com média zero e variância σ_a^2 sendo $|\phi| < 1, |\theta| < 1$. A média e a variância teóricas do processo são dados respectivamente por:

AR(1): $E\left(X_t\right)=\mu=\frac{\delta}{\left(1-\phi\right)}$ $Var\left(X_t\right)=\sigma_s^2=\frac{\sigma_a^2}{\left(1-\phi^2\right)}$

ARMA(1,1): $E\left(X_t\right)=\mu=\frac{\delta}{\left(1-\phi\right)}$ $Var(X_t)=\sigma_s^2=\frac{\left(1-2\phi\theta+\theta^2\right)\sigma_a^2}{\left(1-\phi^2\right)}$

Embora muitos modelos tenham sido simulados no estudo, neste artigo serão apresentados apenas os resultados referentes aos processos temporais descritos no Quadro 5 uma vez que o comportamento geral dos resultados dos modelos não apresentados se assemelha aos obtidos para esses processos. Para cada modelo foram simulados séries com variabilidade residual σ_a^2 igual a 1 e 4. Para efeito de comparação simulou-se também o modelo normal com observações independentes, ou seja um modelo ARMA com ϕ e θ iguais a zero.

Quadro 5: Valores dos parâmetros do modelo ARMA simulados

Processos	Parâmetros ϕ	θ	Autocorrelações $\rho(1)$	$\rho(2)$
AR(1)	0,8	0	0,8	0,64
AR(1)	0,5	0	0,5	0,25
ARMA(1,1)	0,9	-0,1	0,91	0,82
ARMA(1,1)	0,5	-0,1	0,57	0,28

Os valores da constante δ do modelo foram escolhidos de modo que a média da série fosse zero para o caso de processos "sob controle" e igual a 0,5; 1; 2; 3 e 4 para os casos de processos "fora de controle". Os limites de controle foram obtidos a 99,73% em todas as situações. Para cada modelo foram geradas *m*=200 séries de tamanho *n*. Na geração das amostras implantou-se um teste para garantir que cada série gerada era de fato proveniente do correspondente processo teórico simulado e que os limites de controle calculados com base nos valores amostrais eram de fato os representativos do processo. Além disso, as séries de tamanho *n* foram geradas a princípio com tamanho *n+50* sendo as 50 primeiras observações desprezadas. Esse procedimento chamado *Burn-in* tem por finalidade evitar que as observações iniciais influenciem demasiadamente no comportamento da série. Para cada série gerada os limites de controle foram estabelecidos usando cada um dos gráficos considerados neste artigo. Após a delimitação dos limites de controle foram gerados mais 10.000 valores do processo, considerando-se os parâmetros na situação "sob controle" e posteriormente foram gerados mais 10.000 valores da série considerando-se a situação "fora de controle", isto é, simulando-se dados de uma distribuição normal com um deslocamento da média de acordo com a escolha do valor da constante δ. Para cada série estimou-se o *ARL* tanto na situação "sob controle" quanto "fora de controle". O programa computacional usado nas estimações e simulações foi desenvolvido no *software* estatístico R versão 2.0.1 (R Development Core Team,R, 2006).

As cartas de controle avaliadas neste estudo foram as seguintes: Shewhart usando o desvio-padrão amostral com o estimador da variância do processo (va); Shewhart considerando-se os 5 estimadores de desvio-padrão provenientes da metodologia de geoestatística de acordo com Quadro 4; o *CUSUM* com as 6 formas de escolha das constantes *k* e *h* como mostrado no Quadro 1; o *EWMA* com os valores de λ iguais a 0,1 e 0,2 e a carta gerada através dos resíduos do respectivo modelo ARIMA ajustado aos dados da série. As cartas de controle avaliadas com a respectiva notação que será usada na apresentação dos resultados estão no Quadro 6.

Quadro 6: Descrição das cartas de controle avaliadas neste artigo

Carta	Descrição
va	Shewhart padrão, ou seja, usando o estimador s^2.
v1	Shewhart Geoestatística, usando estimador v1, descrito no quadro 1.
v2	Shewhart Geoestatística, usando estimador v2, descrito no quadro 1.
v3	Shewhart Geoestatística, usando estimador v3, descrito no quadro 1.
v4	Shewhart Geoestatística, usando estimador v4, descrito no quadro 1.
v5	Shewhart Geoestatística, usando estimador v5, descrito no quadro 1.
CUSUM1	CUSUM, usando os valores k = 0,25 e h = 8,01.
CUSUM2	CUSUM, usando os valores k = 0,5 e h = 4,77.
CUSUM3	CUSUM, usando os valores k = 0,75 e h = 3,34.
CUSUM4	CUSUM, usando os valores k = 1,0 e h = 2,52.
CUSUM5	CUSUM, usando os valores k = 1,25 e h = 1,99.
CUSUM6	CUSUM, usando os valores k = 1,5 e h = 1,61.
EWMA1	EWMA, usando o valor λ = 0,10, *L=3*
EWMA2	EWMA, usando o valor λ = 0,20, *L=3*
ST	Resíduos do modelo de séries temporais ajustado aos dados resíduos.

5. RESULTADOS

Os Quadros 7 a 11 apresentam os resultados estimados médios dos *ARL* sob e fora de controle obtidos nas simulações, de acordo com as cartas do Quadro 6. Como os resultados obtidos para *n*=50 e *n*=100 foram parecidos preferimos mostrar apenas os resultados para *n*=100. De um modo geral, para processos independentes percebe-se que os valores de *ARL* estimados sob controle foram semelhantes com exceção dos gráficos *EWMA* que forneceram acentuadamente maiores valores que as outras cartas. Nas situações fora de controle as cartas *CUSUM* mostraram o sinal verdadeiro mais rapidamente que as outras sendo *CUSUM* 1 a 4 melhores que as 5 e 6. Os gráficos baseados na metodologia de geoestatística e de séries temporais se mostraram um pouco melhor que o gráfico de Shewhart (com exceção da carta v3) e as cartas *EWMA* apresentaram uma sinalização rápida sendo melhores que o *CUSUM* mas com uma taxa de alarmes falsos maiores. Para os processos autocorrelacionados AR(1) com alta correlação (Quadro 8), para as duas situações de variabilidades, observa-se uma acentuada diminuição dos *ARLs* sob controle para as cartas *CUSUM* e *EWMA*. Embora os *ARL* fora de controle para essas cartas sejam pequenos elas não podem ser consideradas adequadas em vista do alto número de alarmes falsos que geram. A diminuição dos *ARL* sob controle também ocorreu para outras cartas que ficam com uma taxa de alarmes falsos aproximadamente duas vezes maior que o caso de processos independentes, mas ficam em valores ainda aceitáveis sob o ponto de vista prático. Com exceção da cartas *CUSUM e EWMA*, os *ARLs* fora de controle aumentam de um modo geral em relação a situação de processos independentes e apresentam um decaimento mais lento quando se passa de uma mudança de média de 0,5 para 4, sendo v1 e v2 as melhores cartas.

O Quadro 9 apresenta os resultados para processos autocorrelacionados do tipo AR(1*)* com autocorrelação moderada ($\phi = 0,5$). As conclusões se assemelham àquelas obtidas para os processos com alta correlação. No entanto, com exceção das cartas *CUSUM* e *EWMA*, os valores de *ARL* são menores que os obtidos para o AR(1*)* com $\phi = 0,8$.

Para os processos do tipo ARMA(1,1) com alta e moderada correlações (Quadros 10 e 11) percebe-se que os valores de *ARL* tanto em controle quanto fora de controle são mais elevados, em comparação com os resultados do AR(1). Há uma semelhança entre os resultados das cartas *EWMA* e *CUSUM* sendo os valores de *ARL´s* fora de controle baixos mas como os valores de *ARL* sob controle também são pequenos essas cartas ficam impraticáveis. Em comparação com os processos independentes, observa-se que para o processo ARMA com $\phi = 0,9$ e $\theta = -0,1$, as cartas va, v1, v2 e ST tiveram valores de *ARL* sob controle próximos a esses (ver Quadro 7), no entanto os valores de ARL fora de controle são bem diferentes. Já para o processo ARMA com $\phi = 0,5$ e $\theta = -0,1$, os valores de *ARL* sob e fora de controle são bem menores que aqueles obtidos para processos independentes. Como pode ser verificado, a mudança da estrutura de correlação do modelo gerador da série do processo (de AR(1) para ARMA(1,1)) teve uma influência acentuada nos valores de *ARL*. Mesmo sob esse efeito as cartas de geoestatística construídas com os estimadores v1 e v2 se mostraram mais adequadas. Em todos os casos estudados de processos autocorrelacionados o aumento de variabilidade do processo, mantendo-se a estrutura de autocorrelação inalterada, fez com que os alarmes verdadeiros demorassem mais para serem detectados pelas cartas como já era esperado. Praticamente em todas as situações as cartas de geoestatística construídas com os estimadores v1 e v2 se mostraram mais adequadas que as outras cartas para os esses processos. Os gráficos de geoestatística construídos com os estimadores v3, v4 e v5 também foram mais adequados que a de Shewhart perdendo em alguns casos para as cartas construídas via resíduos dos modelos de séries temporais (ST).

Quadro 7: ARL em controle e fora de controle - processos normais independentes

média zero e variância 1 – n=100						
	ARL em controle	*ARL* fora de controle				
Carta	0	0,5	1	2	3	4
Va	428,19	190,47	48,09	6,45	1,92	1,19
v1	409,40	180,84	47,53	6,30	1,91	1,19
v2	403,47	180,30	47,11	6,30	1,89	1,19
v3	420,73	197,70	49,89	6,52	1,97	1,18
v4	394,68	187,83	48,02	6,38	1,95	1,18
v5	394,31	185,09	47,78	6,29	1,94	1,17
CUSUM1	309,67	30,48	11,40	5,14	3,44	2,68
CUSUM2	424,19	38,71	9,94	3,78	2,42	1,91
CUSUM3	406,02	61,88	11,28	3,32	2,06	1,52
CUSUM4	393,60	84,95	14,96	3,23	1,80	1,33
CUSUM5	436,29	114,68	18,68	3,28	1,70	1,23
CUSUM6	426,82	145,50	25,49	3,57	1,66	1,19
EWMA1	761,80	41,73	9,18	2,90	1,57	1,17
EWMA2	591,28	51,66	9,64	2,91	1,56	1,17
ST	391,12	185,02	44,59	6,11	1,96	1,16

Quadro 8: ARL em controle e fora de controle - AR(1) com ϕ= 0,8

ϕ = 0,8; variância = 2,78 , ρ(1) = 0,8, ρ(2) = 0,64 ; $\sigma_a = 1$ - n=100						
	ARL em controle	*ARL* for a de controle				
Carta	**0**	**0,5**	**1**	**2**	**3**	**4**
va	247,23	207,97	121,02	47,16	22,97	12,50
V1	217,42	187,66	105,21	43,52	20,51	12,08
V2	222,33	188,78	108,01	44,34	21,27	12,22
V3	270,80	232,01	125,57	47,20	22,73	13,20
V4	271,01	235,89	128,15	46,26	23,29	12,82
V5	252,98	229,16	126,07	45,97	22,95	12,44
CUSUM1	24,79	23,04	19,95	14,78	9,67	7,88
CUSUM2	22,69	21,17	18,07	13,10	8,20	6,92
CUSUM3	23,16	23,82	21,46	13,93	8,45	6,80
CUSUM4	28,15	27,64	24,77	14,96	9,39	7,00
CUSUM5	39,76	34,94	32,44	18,00	10,42	7,48
CUSUM6	55,16	44,64	40,62	21,21	12,02	8,20
EWMA1	25,15	25,35	21,03	13,82	8,38	6,66
EWMA2	25,02	24,67	21,11	13,45	8,23	6,51
ST	260,35	208,69	215,97	118,59	67,82	40,59
ϕ = 0,8 variância = 11,11 , ρ(1) = 0,8, ρ(2) = 0,64 ; $\sigma_a = 2$ - n=100						
	ARL em controle	*ARL* for a de controle				
Carta	0	0,5	1	2	3	4
va	259,13	247,12	212,43	122,22	80,46	43,61
v1	228,87	217,77	194,48	113,09	70,77	40,48
v2	246,53	214,86	201,83	114,78	71,67	40,33
v3	282,50	270,87	228,82	140,41	83,37	40,96
v4	279,74	258,66	223,03	133,92	83,80	44,18
v5	273,18	252,00	209,06	131,48	81,68	42,70
CUSUM1	26,76	23,47	22,57	19,83	16,89	13,31
CUSUM2	23,41	22,72	20,31	17,99	15,35	11,73
CUSUM3	25,87	25,07	22,07	19,52	16,40	11,87
CUSUM4	31,45	30,12	26,36	21,97	18,64	13,47
CUSUM5	47,18	43,15	35,00	26,30	22,36	16,07
CUSUM6	63,53	59,95	47,96	36,09	28,03	19,39
EWMA1	28,51	27,37	24,33	19,49	15,96	11,58
EWMA2	27,40	26,03	23,53	19,31	16,53	11,66
ST	225,28	248,63	195,18	236,86	141,81	105,71

Quadro 9: ARL em controle e fora de controle - AR(1) com ϕ = 0,5

ϕ = 0,5 variância = 1,33, ρ(1) = 0,5, ρ(2) = 0, 25 ; $\sigma_a = 1$ - n=100						
	ARL em controle	*ARL* for a de controle				
carta	0	0,5	1	2	3	4
va	191,94	124,29	49,33	12,63	5,28	2,98
v1	178,42	117,49	45,40	12,19	5,09	2,94
v2	187,13	116,97	45,47	12,03	5,20	2,96
v3	206,68	121,97	50,81	12,60	5,26	3,02
v4	200,03	121,98	49,84	12,69	5,32	3,00
v5	199,05	121,16	47,29	12,68	5,29	2,99
CUSUM1	41,35	27,26	14,97	7,42	4,79	3,93
CUSUM2	35,91	24,56	13,63	6,19	3,77	3,05
CUSUM3	34,81	25,72	14,34	6,05	3,38	2,77
CUSUM4	44,39	30,15	15,58	6,29	3,31	2,64
CUSUM5	53,18	34,67	18,95	6,62	3,43	2,62
CUSUM6	75,59	41,89	22,94	7,25	3,62	2,64
EWMA1	51,47	29,69	14,11	5,77	3,11	2,50
EWMA2	45,75	27,17	14,41	5,75	3,09	2,47
ST	169,07	146,07	84,65	26,86	10,98	4,49
ϕ= 0,5 variância = 5.33, ρ(1) = 0,5, ρ(2) = 0,25 ; $\sigma_a = 2$ - n=100						
	ARL em controle	*ARL* fora de controle				
Carta	0	0,5	1	2	3	4
va	200,06	160,42	113,53	47,29	19,28	11,51
v1	192,85	141,05	108,55	43,65	18,61	11,27
v2	194,93	146,59	110,23	44,80	18,80	11,34
v3	210,56	160,16	115,12	46,62	19,97	11,63
v4	206,25	155,76	112,97	46,97	19,48	11,48
v5	204,67	155,38	112,97	44,55	19,08	11,47
CUSUM1	41,32	33,70	24,33	13,16	9,13	6,96
CUSUM2	33,07	29,19	21,11	11,85	7,67	5,69
CUSUM3	35,77	31,40	22,97	12,10	7,53	5,30
CUSUM4	44,08	35,49	26,07	13,22	8,03	5,45
CUSUM5	60,22	45,40	32,28	15,85	8,79	6,01
CUSUM6	80,89	59,85	49,21	20,18	9,72	6,84
EWMA1	48,13	39,30	23,62	11,89	7,16	5,06
EWMA2	41,75	36,04	23,33	11,85	7,25	5,15
ST	198,25	145,29	155,84	87,20	52,82	26,29

Quadro 10: ARL em controle e fora de controle - ARMA(1,1) – correlação alta

ϕ = 0,9 ; θ = - 0,1, variância = 6,26, ρ(1) = 0,91, ρ(2) = 0,82 - $\sigma_a = 1$ - n=100						
	ARL em controle	*ARL* out of control				
Carta	0	0,5	1	2	3	4
va	494,41	445,18	348,19	188,88	91,56	50,14
v1	378,23	354,03	257,71	144,64	71,05	43,12
v2	410,26	376,50	282,08	151,53	75,05	44,99
v3	601,99	522,95	362,98	190,28	97,57	50,73
v4	615,43	533,50	388,35	192,23	99,96	49,59
v5	568,99	496,03	356,09	187,61	91,19	48,83
CUSUM1	23,90	24,20	24,44	21,46	16,28	13,34
CUSUM2	24,79	23,71	24,42	21,15	15,40	12,24
CUSUM3	30,81	28,14	27,97	23,84	16,61	13,12
CUSUM4	39,67	36,08	35,45	28,41	19,00	15,06
CUSUM5	53,77	49,49	45,50	35,86	24,78	17,41
CUSUM6	83,84	73,28	59,60	46,05	31,44	21,08
EWMA1	26,84	25,31	26,38	22,93	16,50	12,38
EWMA2	29,14	26,27	27,64	23,28	16,89	12,49
ST	404,65	459,18	471,26	329,16	215,33	167,08
ϕ = 0,9 ; θ = - 0,1, variância = 25,05, ρ(1) = 0,91, ρ(2) = 0,82 ; $\sigma_a = 2$ - n=100						
	ARL em controle	*ARL* fora de controle				
Carta	0	0,5	1	2	3	4
Va	447,58	539,67	372,18	360,70	255,33	154,84
v1	341,48	392,18	277,18	262,26	218,55	133,94
v2	353,26	431,66	283,95	273,79	214,13	137,15
v3	501,30	556,54	433,80	417,60	256,52	186,20
v4	522,10	603,20	438,83	403,44	281,67	179,68
v5	469,04	561,34	416,74	365,49	259,79	169,33
CUSUM1	22,31	21,18	23,87	23,28	21,76	19,11
CUSUM2	20,91	20,61	24,34	21,63	20,53	18,92
CUSUM3	25,66	25,93	27,48	25,10	23,51	21,80
CUSUM4	34,94	32,13	34,55	30,89	30,11	26,22
CUSUM5	48,93	45,66	48,75	42,24	37,51	34,02
CUSUM6	70,44	64,65	66,20	58,12	54,30	44,35
EWMA1	22,86	22,79	26,15	23,33	21,95	19,82
EWMA2	25,35	24,88	26,73	24,29	23,06	20,80
ST	337,58	356,62	333,17	254,82	275,92	257,68

Quadro 11: ARL em controle e fora de controle - ARMA(1,1) – correlação moderada

ϕ = 0,5 ; θ = - 0,1; variância = 1,48; ρ(1) = 0,57; ρ(2) = 0,28 ; $\sigma_a = 1$ - n=100						
	ARL em controle	*ARL* for a de controle				
Carta	0	0,5	1	2	3	4
va	321,04	176,86	66,83	14,31	5,29	3,31
v1	293,89	165,56	63,17	13,78	5,06	3,24
v2	298,86	171,69	64,65	13,94	5,08	3,27
v3	328,28	170,47	65,93	14,84	5,26	3,34
v4	327,37	174,85	66,43	14,72	5,22	3,32
v5	321,01	174,85	64,88	14,61	5,20	3,30
CUSUM1	51,69	28,94	14,73	7,31	4,89	4,00
CUSUM2	43,15	26,62	13,13	6,00	3,90	3,14
CUSUM3	48,35	28,91	14,03	5,82	3,51	2,80
CUSUM4	56,54	35,38	16,20	6,04	3,46	2,68
CUSUM5	72,86	47,87	21,69	6,73	3,53	2,67
CUSUM6	109,85	62,50	27,05	7,84	3,68	2,72
EWMA1	1780,28	1186,42	549,55	124,47	20,40	9,12
EWMA2	91,63	36,32	13,38	5,62	3,31	2,55
EWMA3	65,09	32,00	13,38	5,57	3,26	2,53
EWMA4	52,36	31,18	13,38	5,48	3,26	2,49
ST	238,74	155,40	119,32	32,30	11,02	6,05

ϕ = 0,5 ; θ = - 0,1; variância = 5,92; ρ(1) = 0,57; ρ(2) = 0,28 ; $\sigma_a = 2$ - n=100						
	ARL em controle	*ARL* fora de controle				
carta	0	0,5	1	2	3	4
va	310,41	272,33	160,66	59,62	32,86	14,07
V1	287,09	243,78	147,75	52,65	29,86	13,53
V2	290,86	254,14	149,02	54,26	30,31	13,94
V3	342,59	280,06	167,07	61,74	31,88	14,19
V4	325,91	275,77	167,04	61,44	30,86	14,10
V5	311,18	264,58	166,90	58,38	30,41	14,00
CUSUM1	44,43	41,37	28,74	15,31	9,62	7,37
CUSUM2	39,94	33,55	26,73	13,31	8,36	5,99
CUSUM3	42,43	38,93	28,76	13,53	8,41	5,77
CUSUM4	52,88	48,35	35,91	16,40	8,86	6,08
CUSUM5	74,18	64,98	46,60	19,39	10,42	6,64
CUSUM6	108,24	87,33	58,46	23,77	12,39	7,26
EWMA1	56,73	48,77	33,01	13,76	8,03	5,61
EWMA2	48,41	42,68	31,59	13,29	8,06	5,63
ST	225,00	231,71	160,21	100,63	52,79	29,29

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados apresentados neste artigo mostram que a autocorrelação tem um impacto acentuado no comportamento das cartas de controle tradicionais como a de Shewhart, *EWMA* e *CUSUM*. Além disso, a grandeza do impacto depende do tipo de modelo que gera os dados amostrais do processo. Neste artigo foram estudados apenas os modelos AR(1) e ARMA(1,1) com correlações altas e moderadas, observando-se que a introdução do parâmetro de média móvel teve uma grande influência no comportamento da série, equilibrando a parte autoregressiva. Assim, os modelos que apresentam maior variabilidade têm conseqüentemente a amplitude entre os limites de controle maior e o parâmetro média móvel mantém a série por mais tempo entre os limites de controle atrasando a percepção da alteração na média do processo e conseqüentemente elevando os valores de *ARL* sob controle e fora de controle, principalmente para valores maiores de θ. Para θ fixo, um aumento de ϕ é acompanhado de um aumento do *ARL* tanto em controle como fora de controle sendo o mesmo comportamento observado quando há um aumento de θ para ϕ fixo.

De um modo geral, para os modelos os resultados mostraram que quanto maior a autocorrelação mais indicados são os gráficos de Shewhart construídos com as estimativas de variabilidade de geoestatística pois estes apresentaram valores mais adequados de *ARL* tanto em controle quanto fora de controle principalmente quando construídos com os estimadores v1 e v2. As cartas construídas com os estimadores v3, v4 e v5 apresentaram bons resultados mas um pouco inferiores aos observados com v1 e v2. Em todas as situações os resultados para AR(1) foram melhores que os do ARMA(1,1). Já o gráfico construído via resíduos dos modelos de séries temporais teve, em grande parte, um comportamento similar aos resultados do gráfico de Shewhart construído com o desvio padrão amostral. Os resultados para os gráficos CUSUM e EWMA, mostram que esses não são adequados para processos autocorrelaciondos uma vez que apresentam um alto valor de alarme falsos gerando assim um grande número de intervenções desnecessárias no processo, o que é indesejável.

Os gráficos de geoestatística são práticos pois dispensam a identificação e ajuste de modelos de séries temporais aos dados e podem ser usados para amostras pequenas. É interessante notar que para processos independentes o gráfico de Shewhart usual construído com desvio padrão S apresentou desempenho similar e algums vezes inferior aos de geoestatística o mesmo acontecendo com o gráfico dos resíduos do ajuste do modelo de séries temporais aos dados (ST). No entanto para processos independentes os gráficos *EWMA* e *CUSUM* foram os mais indicados por detectarem mais rapidamente o sinal verdadeiro sendo os gráficos *CUSUM* 1 a 4 melhores que os 5 e 6.

Em todos os casos o aumento da variabilidade do processo acresceu os valores dos *ARL* tanto em quanto fora de controle para processos autocorrelacionados ou não.

7. AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq ao qual prestamos nossos agradecimentos.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALWAN, A. J., ALWAN, L. C. Monitoring autocorrelated processes using multivariate quality control charts. **In Proceedings of the Decision Sciences Institute Annual Meeting**, n.3, 2106-2108, 1994.

ALWAN, L. C., ROBERTS, H. V. The Problem of missplaced control limits. **Applied Statistics, JRSS,** Series C, v. 44, n. 3, 269-278, 1995.

AMORIM, S. e COSTA, A. F. B. **Detecção rápida de perturbações em um processo industrial**. Minicurso, 11º. SINAPE, Belo Horizonte: UFMG, 1994, 55 p.

APLEY, D. W. , SHI, J. The glrt for statistical process control of autocorrelated processes. **IIE Transactions**, 31, 1123-1134, 1999.

APLEY, D. W., TSUNG, F. The autoregressive T2 chart for monitoring univariate autocorrelated processes. **Journal of Quality Technology**, v. 34, n.1,80-96.

ATIENZA, O. O., TANG, L. C., ANG, B. W. A cusum scheme for autocorrelated observations. **Journal of Quality Technology**, v. 34, n. 2, 187-199, 2002,

BOX, G. P. AND LUCENO, A. **Statistical control by monitoring and feedback adjustment.** New York: John Wiley, 1997.

CLARO, F. A. E., COSTA, A. F. B., MACHADO, M. A. G. Gráficos de controle de EWMA e de X-barra para monitoramento de processos autocorrelacionados. **Produção**, v. 17, n. 3, 536-546, 2007.

COSTA, A. F. B., EPPRECHT, E. K., CARPINETTI, L. C. R. **Controle Estatístico de Qualidade.** São Paulo: Editora Atlas, 2005.

EPPRECHT, A. L., NINIO, A. L., SOUZA, M. O. Projeto ótimo de gráficos de médias móveis ponderados exponencialmente (EWMA) para controle estatístico de processos. **Pesquisa Operacional**, v. 18, n. 2, 109-130, 1998.

HAWKINS, D. M., OLWELL, D.H. Cumulative sum control charting: an underutilized spc tool. **Quality Engineering**, v. 5, n. 3, p. 463-477, 1993.

HOULDING, S. W. **Pratical geostatistics**. New York: Springer Verlag, 2000.

HUNTER, J. S. The exponentially weighted moving average. **Journal of Quality Technology**, n. 18, 202-209, 1986.

JOURNEL, A. G.,HUIJBREGTS, Ch. J. **Mining Geostatistics**. New York: Academic Press, 1978.

LUCAS, J. M.,CACCUCCI, M. S. Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancements (with discussion). **Technometrics**, n. 32, 1-129,1990.

MATHERON, G. Principles of geostatistics, **Economic geology**, v. 58, n. 8, 1246-1266, 1963.

MASON, R. L., YOUNG, J. C. **Multivariate statistical process control with industrial applications,** ASA-SIAM, 2002.

MINGOTI, S. A., FIDELIS, M. T. Aplicando geoestatística no controle estatístico de processos, **Produto & Produção**, v. 5, n. 2, 55-70, 2001.

MINGOTI, S. A., NEVES, O. F. Using geostatistics to estimate the variability of autocorrelated process. **Brazilian Journal of Operations & Production Management**, v. 2, n. 1, 25-38, 2005.

MONTGOMERY, D. C. E MASTRANGELO, C. M. *Some statistical process control methods for autocerrelated data.* **Journal of Quality Technology**, v.23, n.3, 179-193, 1991.

MONTGOMERY, D. C. **Introdução ao controle estatístico da qualidade**. Brasil: Livros Técnicos e Científicos, 2004.

MORETTIN, P. A. E TOLOI, C. M. C. **Análise de séries temporais**. São Paulo: Edgard Blücher, 2004.

PAGE, E. S. Continuous inspection schemes, **Biometrics**, 41, 1954.

R Development Core Team, R: A language and environment for statistical computing. R. **Foundation for Statistical Computing**, Vienna, Austria. ISBN:3-900051-07-0, URL http://www.R-project.org,2006.

ROCON, G. **Comparação de cartas de controle multivariadas usadas no monitoramento de processos univariados autocorrelacionados**. Belo Horizonte: Departamento de Estatística, Universidade Federal de Minas Gerais, 2005 (Dissertação de mestrado).

ROBERTS, S. W. Control chart testes based on geometric moving averages. **Technometrics**, n. 1, p. 239-251,1959.

SHEWHART, W. A. **Economic control of quality of manufactured product**. New York: Van-Nostrand Reinhold, Princeton, 1932.

ZHANG, N. F. Estimating process capability indexes for autocorrelated data. **Journal of Applied Statistics**, v. 25, n. 4, p. 559-574, 1998.

A comparison of control charts for the average of autocorrelated processes

Sueli A. Mingoti[1], sueliam@est.ufmg.br

Fabiane R. S. Yassukawa[2], fabianesy@yahoo.com.br

[1] Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Professora Associada do corpo docente da Graduação e Pós-Graduação em Estatística

Belo Horizonte, MG, Brasil

[2] Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Bacharela em Estatística, Belo Horizonte, MG, Brasil

*Received: April, 2008 / Accepted: April, 2008

ABSTRACT

Control charts are extensively used with the purpose of monitoring some parameters of the process. In general these charts are based on the normality and independence assumptions of the sample observations. However, there are situations where the independence is not valid such as in chemical processes or sampling on-line. In this paper we compared the control charts based on geostatistics and time series methodologies with the well-known charts Shewhart, CUSUM and EWMA, when used to monitor the average of autocorrelated processes. The comparison was performed by using Monte Carlo simulation implemented in the software R for Windows.

Keywords: Control Charts. Autocorrelated Processes. Geostatistics. Monte Carlo. Time Series.